INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

RICHARD GRAMMEL

XVII. BAND SECHSTES (SCHLUSS-) HEFT 1949

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DMark 22.60

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 25 Bogen vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. R. **Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig**, Berlin-Charlottenburg, Technische Universität, Hardenbergstraße 34

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Karlsruhe i. Baden, Technische Hochschule

Professor Dr.-Ing. K. v. **Sanden**, Stuttgart N, Roseggerweg 8

Professor Dr.-Ing. E. **Schmidt**, Braunschweig, Harzburger Straße 8 a

Professor Dr.-Ing. E. **Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24
Fernsprecher 24 40

Berlin-Charlottenburg 2
Jebensstraße 1
Fernsprecher 32 20 70

Inhalt:

Seite

Betz, Albert, und *E. Krahn*, Berechnung von Unterschallströmungen kompressibler Flüssigkeiten um Profile. Mit 15 Textabbildungen 403

Mettler, Eberhard, Allgemeine Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper. Mit 5 Textabbildungen 418

Kauderer, Hans, Über ein nichtlineares Elastizitätsgesetz. Mit 7 Textabbildungen 450

INGENIEUR-ARCHIV

XVII. BAND SECHSTES (SCHLUSS-)HEFT 1949

Berechnung von Unterschallströmungen kompressibler Flüssigkeiten um Profile.

Von **A. Betz** und **E. Krahn.**

1. Einleitung. Für das Problem der Umströmung eines Körpers in einer kompressiblen Flüssigkeit bei Unterschallgeschwindigkeiten kennt man keine exakten Lösungen. Man ist daher auf Näherungsverfahren angewiesen. Hier wird der Fall einer zweidimensionalen Potentialströmung behandelt. Ausgegangen wird von der Geschwindigkeitsverteilung in einer inkompressiblen Strömung um denselben Körper. Als erste Näherung für die Geschwindigkeit der kompressiblen Strömung wird dann ein Ansatz gemacht, der nicht nur auf schlanke Körper anwendbar ist, und davon ausgehend eine zweite Näherung berechnet. Es interessiert dabei im wesentlichen die Geschwindigkeitsverteilung an der Oberfläche des umströmten Körpers. Nach dem gefundenen Verfahren ist eine Reihe vorgegebener Körper numerisch durchgerechnet worden. Auf Grund der Ergebnisse ließ sich eine einfache Näherungsformel für die Geschwindigkeitsverteilung bei üblichen Formen von Flügelprofilen aufstellen.

2. Ein bequemes Rechenverfahren. In einer nicht zusammendrückbaren Flüssigkeit ist die Bedingung, daß in ein Raumelement von gegebener Größe ebensoviel hinein- wie hinausströmen muß, die sogenannte Kontinuitätsbedingung, in Vektorschreibweise durch die Gleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{W} = 0 \tag{1}$$

gegeben, wobei $\mathfrak{W}$ der Geschwindigkeitsvektor ist[1]. Die Bedingung der Drehungsfreiheit wird durch die Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{W} = 0 \tag{2}$$

ausgedrückt. Auf Grund dieser Bedingungen ist die ganze Strömung durch die Randbedingungen, z. B. die Anströmgeschwindigkeit im Unendlichen und die Form des umströmten Körpers eindeutig festgelegt und läßt sich im allgemeinen mit erträglichem Aufwand an Rechenarbeit ermitteln.

Ist die Dichte ϱ der Flüssigkeit nicht konstant, so ändert sich die Kontinuitätsgleichung in

$$\operatorname{div} \varrho \mathfrak{v} = 0; \tag{3}$$

die Gleichung der Drehungsfreiheit bleibt unverändert bestehen:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0\,. \tag{4}$$

Mit $\mathfrak{W}$ bezeichnen wir die Lösung für konstante Dichte, also für inkompressible Flüssigkeiten [Gleichung (1) und (2)], mit $\mathfrak{v}$ die für kompressible Flüssigkeiten [Gleichung (3) und (4)]. Um gleiche Randbedingungen zu haben, müssen die Geschwindigkeiten im Unendlichen $\mathfrak{W}_\infty$ und $\mathfrak{v}_\infty$ gleiche Richtung haben. Ihre Beträge können verschieden sein. Wir wollen aber die Geschwindigkeiten auf die Anströmgeschwindigkeit Eins im Unendlichen normieren und schreiben

$$\mathfrak{W}/V_\infty = \mathfrak{W} \quad \text{und} \quad \mathfrak{v}/v_\infty = \mathfrak{w}\,. \tag{5}$$

Setzen wir näherungsweise

$$\mathfrak{w} \approx \mathfrak{W}, \tag{6}$$

so sehen wir, daß wir damit zwar die Drehungsfreiheit, nicht aber die Kontinuität erfüllen:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{W} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{W} = 0, \quad \operatorname{div} \varrho \mathfrak{W} \neq 0, \tag{7}$$

und zwar ist der Fehler, den wir begehen[2],

$$\operatorname{div} \varrho \mathfrak{W} = \varrho \operatorname{div} \mathfrak{W} + \mathfrak{W} \cdot \operatorname{grad} \varrho = \mathfrak{W} \cdot \operatorname{grad} \varrho\,. \tag{8}$$

---

[1] Im folgenden sind Vektoren mit deutschen Buchstaben, z. B. $\mathfrak{v}$, Skalare mit lateinischen oder griechischen Buchstaben bezeichnet. Der Betrag eines Vektors wird entweder durch das Betragszeichen, z. B. $|\mathfrak{v}|$ oder der Einfachheit halber mit lateinischer Schrift, z. B. v ausgedrückt. Die später benützten komplexen Größen werden durch Blockschrift, bei griechischen Formelzeichen durch Unterstreichen, kenntlich gemacht, z. B. v. Ihre Beträge werden entsprechend wie bei den Vektoren ausgedrückt, z. B. $|\mathsf{v}|$ oder v.

[2] $\mathfrak{W} \cdot \operatorname{grad} \varrho$ bezeichnet das skalare, $\mathfrak{W} \times \operatorname{grad} \varrho$ das vektorielle Produkt von $\mathfrak{W}$ und $\operatorname{grad} \varrho$.

Das Vektorfeld $\varrho\mathfrak{W}$ enthält Quellen von der Ergiebigkeit $\mathfrak{W} \cdot \operatorname{grad} \varrho$ je Flächeneinheit.

Wir können die Lösung $\mathfrak{W}$ für konstante Dichte auch näherungsweise für $w\varrho/\varrho_\infty$ setzen:

$$w \approx \mathfrak{W}\varrho_\infty/\varrho\,. \tag{9}$$

Wir erfüllen dann die Kontinuitätsbedingung, aber nicht die der Drehungsfreiheit:

$$\varrho_\infty \operatorname{div} \mathfrak{W} = 0, \qquad \varrho_\infty \operatorname{rot} \mathfrak{W}/\varrho \neq 0\,. \tag{10}$$

Das Vektorfeld $\mathfrak{W}\varrho_\infty/\varrho$ enthält ein Wirbelfeld

$$\varrho_\infty \operatorname{rot} \mathfrak{W}/\varrho = -\varrho_\infty \mathfrak{W} \times \operatorname{grad} 1/\varrho\,. \tag{11}$$

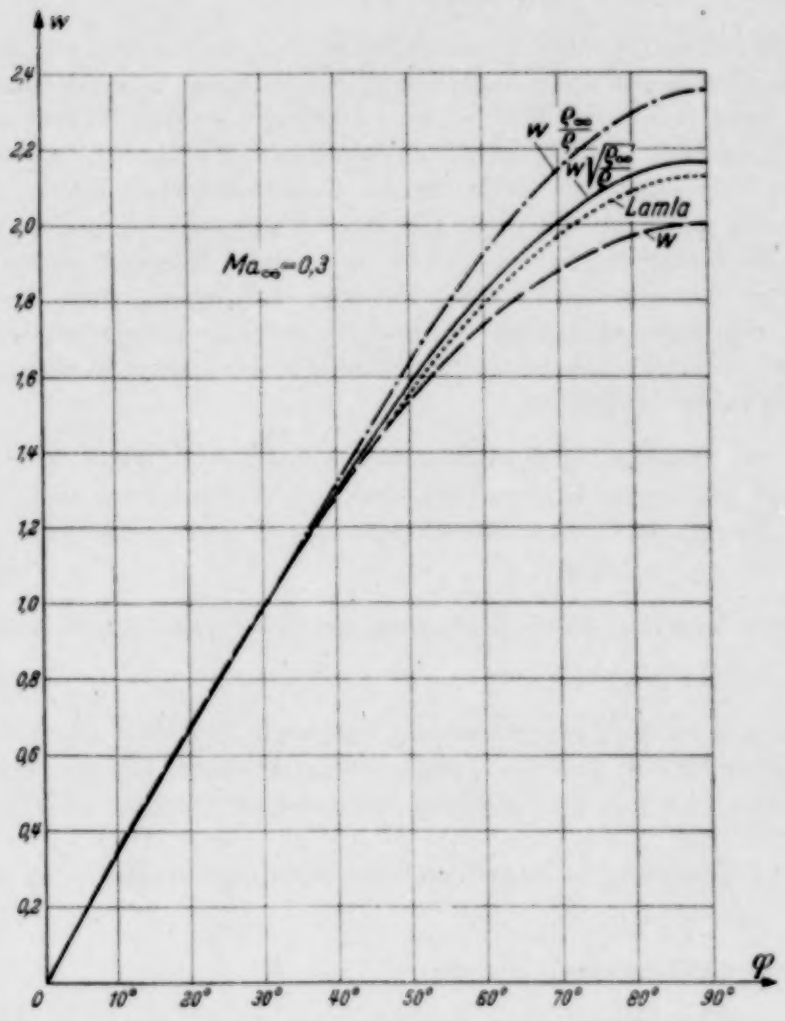

Abb. 1. Geschwindigkeit am Kreiszylinder.

Der Vergleich mit bekannten Näherungswerten für die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Kreiszylinders und einiger tragflügelartiger Profile zeigte, daß die Näherung $w \approx \mathfrak{W}$ einen Fehler im entgegengesetzten Sinne wie die Näherung $w \approx \mathfrak{W}\varrho_\infty/\varrho$ ergibt und daß beide Fehler etwa von der gleichen Größenordnung sind. In Abb. 1 sind die Ergebnisse für einen Kreiszylinder dargestellt, für eine *Mach*sche Zahl der Anströmung $Ma_\infty = 0{,}3$, was einer maximalen örtlichen *Mach*schen Zahl $Ma_{\max} = 0{,}66$ entspricht. Aufgetragen sind die Werte von w über dem Kreisumfang, ausgedrückt durch den Bogenwinkel φ vom Staupunkt an gerechnet. Als richtigen Verlauf kann man etwa die vierte Näherung der von *Lamla*[1] nach einem Verfahren von *Janzen* und *Rayleigh* berechneten Werte ansehen. Die unterste Kurve stellt die Näherung $w \approx \mathfrak{W}$, die oberste die Näherung $w \approx \mathfrak{W}\varrho_\infty/\varrho$ dar.

Auf Grund dieser Betrachtungen wurde von *E. Krahn*[2] ein Mittelweg vorgeschlagen, der eine bessere Näherung ergibt. Er besteht darin, daß man als Näherung

$$w \approx \mathfrak{W}\sqrt{\varrho_\infty/\varrho} \tag{12}$$

setzt. Man erfüllt dann weder die Bedingung der Kontinuität noch die der Drehungsfreiheit. Es bleibt ein Quellenfeld

$$\operatorname{div} \mathfrak{W}\sqrt{\varrho/\varrho_\infty} = \mathfrak{W} \cdot \operatorname{grad} \sqrt{\varrho/\varrho_\infty} \tag{13}$$

und ein Wirbelfeld

$$\operatorname{rot} \mathfrak{W}\sqrt{\varrho_\infty/\varrho} = -\mathfrak{W} \times \operatorname{grad} \sqrt{\varrho_\infty/\varrho} \tag{14}$$

bestehen. Aber die Felder dieser Quellen und Wirbel heben sich an der Oberfläche weitgehend auf, stören also das Ergebnis wesentlich weniger als die einzelnen Quellen- und Wirbelfelder bei der Näherung $w \approx \mathfrak{W}$ bzw. $w \approx \mathfrak{W}\varrho_\infty/\varrho$.

In Abb. 1 ist auch die auf diese Weise für den Kreis ermittelte Geschwindigkeitsverteilung aufgetragen.

Wenn auch die mit dieser einfachen Regel gewonnenen Ergebnisse bei den sehr extremen Verhältnissen des Kreiszylinders noch merkliche Abweichungen von den wahren Werten ergeben, so stimmen sie bei normalen Flügelprofilen so gut mit Meßergebnissen überein, daß man sich vielfach mit dieser Näherung begnügen kann.

[1] *E. Lamla*, Jahrb. d. deutschen Luftfahrtforschung S. I 165 (1939).
[2] *E. Krahn*, AVA-Bericht 42/A/01.

Die Dichte ϱ und damit auch $\sqrt{\varrho}$ hängen vom Betrag der Geschwindigkeit $v = v_\infty w$ ab, und zwar ist

$$\frac{\varrho}{\varrho^*} = \left[\frac{\varkappa+1}{2} - \frac{\varkappa-1}{2}\left(\frac{v}{c^*}\right)^2\right]^{1/(\varkappa-1)}, \tag{15}$$

wobei c^* die kritische Schallgeschwindigkeit ist, das ist die Schallgeschwindigkeit, welche bei der Strömungsgeschwindigkeit $v = c^*$ herrscht; ϱ^* ist die Dichte bei dieser Geschwindigkeit, und $\varkappa$ ist das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen. Wenn wir nun an Stelle von w die erste Näherung

$$w_1 = W\sqrt{\varrho_\infty/\varrho} \tag{16}$$

setzen, so können wir den Umrechnungsfaktor $\sqrt{\varrho_\infty/\varrho}$ als Funktion von $v_\infty w_1/c^*$ berechnen und damit auch $W = w_1\sqrt{\varrho/\varrho_\infty}$. Für den bequemen Gebrauch ist in Abb. 2 der Zusammenhang

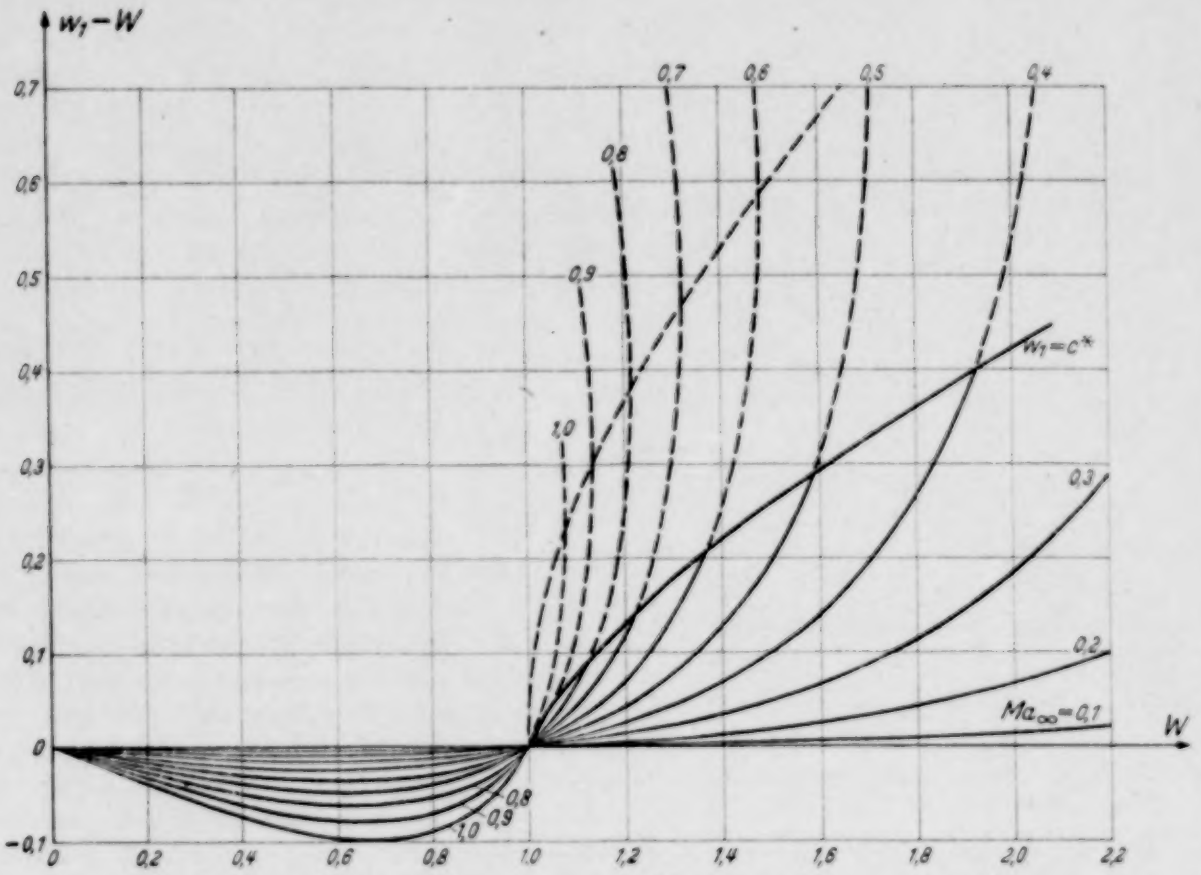

Abb. 2. Zusammenhang der Geschwindigkeit w_1 der kompressiblen Strömung mit der Geschwindigkeit W der inkompressiblen Strömung.

zwischen $w_1 - W$ und W dargestellt. Da ϱ_∞ selbst nach (15) von v_∞/c^* abhängt und c^* sich durch die Schallgeschwindigkeit c_∞ bei der Geschwindigkeit v_∞ ausdrücken läßt:

$$c^* = c_\infty\sqrt{\frac{2}{\varkappa+1}}\sqrt{1 + \frac{\varkappa-1}{2}\left(\frac{v_\infty}{c_\infty}\right)^2}, \tag{17}$$

so ist ϱ_∞ eine Funktion der *Mach*schen Zahl der Zuströmung

$$Ma_\infty = \frac{v_\infty}{c_\infty}. \tag{18}$$

In den Zusammenhang nach (16) geht daher diese *Mach*sche Zahl als Parameter ein.

3. Grundlagen zu einer Fehlerabschätzung. Wenn wir die im vorigen Abschnitt beschriebene Rechenvorschrift anwenden, machen wir gegenüber den richtigen Geschwindigkeitswerten, die den Bewegungsgleichungen entsprechen, Fehler. In diesem Abschnitt soll diese Fehlergröße berechnet und ein Näherungsverfahren angegeben werden, um sie zu beseitigen.

Als erste Näherung hatten wir in (16)

$$\mathfrak{w}_1 = \mathfrak{W}\sqrt{\varrho_\infty/\varrho}$$

gesetzt. Die wahre Lösung $\mathfrak{w}$ unterscheide sich davon um den Fehlerbetrag

$$\mathfrak{w} - \mathfrak{w}_1 = \mathfrak{w}'\sqrt{\varrho_\infty/\varrho}. \tag{19}$$

Die Gleichungen (3) und (4) gehen daher über in

$$\operatorname{div}(\mathfrak{W}+\mathfrak{w}')\sqrt{\varrho}=0\,,\qquad \operatorname{rot}(\mathfrak{W}+\mathfrak{w}')/\sqrt{\varrho}=0 \tag{20}$$

oder

$$\operatorname{div}\mathfrak{w}'\sqrt{\varrho}=-\operatorname{div}\mathfrak{W}\sqrt{\varrho}\,,\qquad \operatorname{rot}\mathfrak{w}'/\sqrt{\varrho}=-\operatorname{rot}\mathfrak{W}/\sqrt{\varrho}\,. \tag{21}$$

Da nun allgemein für einen Skalar a und einen Vektor $\mathfrak{w}$ gilt

$$\operatorname{div} a\mathfrak{w}=a\operatorname{div}\mathfrak{w}+\mathfrak{w}\cdot\operatorname{grad}a\,, \tag{22}$$

$$\operatorname{rot} a\mathfrak{w}=a\operatorname{rot}\mathfrak{w}-\mathfrak{w}\times\operatorname{grad}a\,, \tag{23}$$

so ergibt sich unter Berücksichtigung, daß $\operatorname{div}\mathfrak{W}=0$ und $\operatorname{rot}\mathfrak{W}=0$ ist, aus (21):

$$\operatorname{div}\mathfrak{w}'=-(\mathfrak{W}+\mathfrak{w}')\cdot\frac{\operatorname{grad}\sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}}=-\frac{1}{2}(\mathfrak{W}+\mathfrak{w}')\cdot\operatorname{grad}\ln\varrho \tag{24}$$

und

$$\operatorname{rot}\mathfrak{w}'=(\mathfrak{W}+\mathfrak{w}')\times\frac{\operatorname{grad}(1/\sqrt{\varrho})}{(1/\sqrt{\varrho})}=-\frac{1}{2}(\mathfrak{W}+\mathfrak{w}')\times\operatorname{grad}\ln\varrho\,. \tag{25}$$

Nun ist ϱ abhängig von $|\mathfrak{v}|=v_\infty|\mathfrak{w}|$ und damit auch von $v_\infty|\mathfrak{W}+\mathfrak{w}'|=|\mathfrak{v}|\sqrt{\varrho/\varrho_\infty}$. Wenn wir in Gleichung (15) v durch $|\mathfrak{W}+\mathfrak{w}'|$ ausdrücken, also

$$\frac{v}{c^*}=\frac{v_\infty}{c^*}\sqrt{\frac{\varrho_\infty}{\varrho^*}}\,|\mathfrak{W}+\mathfrak{w}'|\sqrt{\frac{\varrho^*}{\varrho}}=m\,|\mathfrak{W}+\mathfrak{w}'|\sqrt{\frac{\varrho^*}{\varrho}} \tag{26}$$

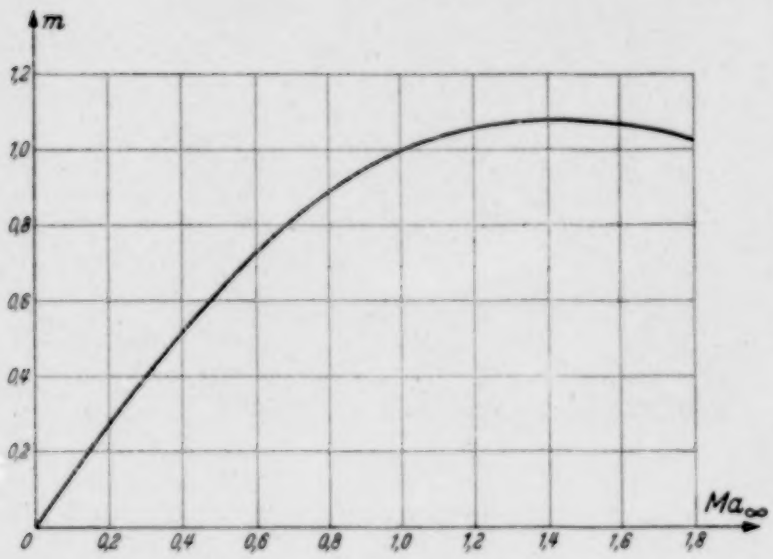

Abb. 3. Die Funktion m.

setzen, so erhalten wir einen Zusammenhang zwischen (ϱ/ϱ^*) und $(m\,|\mathfrak{W}+\mathfrak{w}'|)^2$. Dabei ist

$$m=\frac{v_\infty}{c_\infty}\,\frac{c_\infty}{c^*}\sqrt{\frac{\varrho_\infty}{\varrho^*}}\,. \tag{27}$$

Da ϱ_∞/ϱ^* und c_∞/c^* gemäß (15) und (17) selbst Funktionen von v_∞/c_∞ sind, so ist m nur von der *Mach*schen Zahl $Ma_\infty=v_\infty/c_\infty$ abhängig. Der Zusammenhang zwischen m und Ma_∞ ist in Abb. 3 dargestellt.

Da sich ϱ, wie sich aus (15) und (26) ergibt, als Funktion von $m|\mathfrak{W}+\mathfrak{w}'|$ darstellen läßt, ist

$$\operatorname{grad}\ln\varrho=\frac{d\ln\varrho}{d(m|\mathfrak{W}+\mathfrak{w}'|)^2}\operatorname{grad}(m|\mathfrak{W}+\mathfrak{w}'|)^2. \tag{28}$$

Wir setzen

$$\frac{d\ln\varrho}{d(m|\mathfrak{W}+\mathfrak{w}'|)^2}=-\lambda \tag{29}$$

und finden für diese Größe unter Verwendung von (15) und (26)

$$\left.\begin{aligned}\lambda&=-\frac{d\ln\varrho}{d(v/c^*)^2}\,\frac{1}{d(m|\mathfrak{W}+\mathfrak{w}'|)^2/d(v/c^*)^2}\\&=-\frac{\varrho^*}{\varrho}\,\frac{d\ln\varrho}{d(v/c^*)^2}\,\frac{1}{1+(v/c^*)^2\dfrac{d\ln\varrho}{d(v/c^*)^2}}\\&=\frac{1}{(\varkappa+1)\dfrac{\varrho}{\varrho^*}-\varkappa(m|\mathfrak{W}+\mathfrak{w}'|)^2}\,.\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Diese Funktion ist in Abb. 4 dargestellt. Sie bildet eine wesentliche Grundlage für die weiteren Rechnungen. Wir können sie auch durch eine Potenzreihe nach $(m\,|\mathfrak{W}+\mathfrak{w}'|)^2$ darstellen:

$$\lambda=\lambda_0+\lambda_1(m|\mathfrak{W}+\mathfrak{w}'|)^2+\lambda_2(m|\mathfrak{W}+\mathfrak{w}'|)^4+\lambda_3(m|\mathfrak{W}+\mathfrak{w}'|)^6+\cdots. \tag{31}$$

Beschränken wir uns auf die ersten vier Glieder, so erhalten wir eine gute Annäherung bis etwa $(m\,|\mathfrak{W}+\mathfrak{w}'|)^2=1{,}0$ durch die Werte $\lambda_0=0{,}264$, $\lambda_1=0{,}114$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0{,}534$.

Bis zu $(m\,|\mathfrak{W}+\mathfrak{w}'|)^2=1{,}1$ ist die Reihe mit vier Gliedern brauchbar, wenn wir $\lambda_0=0{,}264$, $\lambda_1=0{,}50$, $\lambda_2=-1{,}59$, $\lambda_3=1{,}89$ setzen. Dabei müssen wir aber etwas größere Abweichungen bei kleineren Werten $(m\,|\mathfrak{W}+\mathfrak{w}'|)^2$ in Kauf nehmen. In Abb. 4 sind die sich aus diesen beiden Darstellungen ergebenden Näherungskurven mit eingezeichnet. Sie sind mit I und II bezeichnet.

Unter Verwendung dieser Funktion λ gehen (24) und (25) über in

$$\operatorname{div}\mathfrak{w}'=\lambda m^2\,|\mathfrak{W}+\mathfrak{w}'|\,(\mathfrak{W}+\mathfrak{w}')\cdot\operatorname{grad}|\mathfrak{W}+\mathfrak{w}'|\,, \tag{32}$$

$$\operatorname{rot}\mathfrak{w}'=\lambda m^2\,|\mathfrak{W}+\mathfrak{w}'|\,(\mathfrak{W}+\mathfrak{w}')\times\operatorname{grad}|\mathfrak{W}+\mathfrak{w}'|\,. \tag{33}$$

Wenn wir $\mathfrak{w}'$ gegen $\mathfrak{W}$ vernachlässigen, so ist uns in (32) und (33) von den Größen der rechten Seite in der ganzen Strömungsebene alles bekannt, da ja $\mathfrak{W}$ die bekannte Lösung der inkompressiblen Strömung und λ eine gegebene Funktion von $m\,|\mathfrak{W}|$ ist. Wir können daher für jeden Punkt der Strömungsebene div $\mathfrak{w}'$ und rot $\mathfrak{w}'$ berechnen.

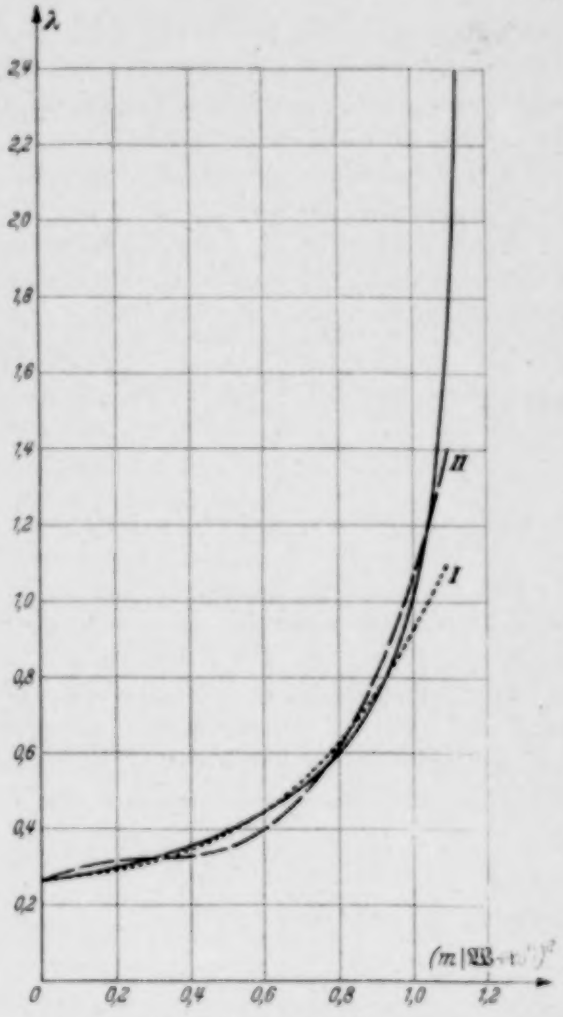

Abb. 4. Die Funktion λ.

Es wäre nun eine sehr langwierige Arbeit, wenn wir die Rechnung so durchführen würden, daß wir die Quell- und Wirbelverteilungen punktweise berechnen und daraus wieder punktweise die Strömungsfelder ermitteln wollten. Wir wollen daher versuchen, diese Rechnung durch weitere Umformungen zu erleichtern. Dazu gehen wir von der Vektorschreibweise zur Darstellung der Vektoren durch komplexe Größen (Blockschrift) über. Einige Rechenregeln, die wir dabei häufiger gebrauchen, sind im Anhang zusammengestellt.

Wir werden zwei Berechnungsverfahren zur Darstellung bringen. Das eine beruht auf einer formelmäßigen Integration der vorkommenden Ausdrücke, das andere auf einer numerischen oder graphischen Integration. Das erste werden wir am Beispiel der Strömung um einen Kreiszylinder erläutern, wofür es sich gut eignet. Das zweite ist allgemeiner verwendbar und insbesondere für Tragflügelprofile geeignet. Es schien uns aber zweckmäßig, auch das erste Verfahren darzustellen, da es gewisse Einblicke in die Ursachen und in die Verteilung der Fehler vermittelt, die vielleicht ganz nützlich sein können.

Unter Verwendung der komplexen Schreibweise und ihrer Rechenregeln [insbesondere Anhang, Gleichung (9) und (14)] können wir (32) und (33), wenn wir $\mathfrak{w}'$ gegen $\mathfrak{W}$ vernachlässigen, zusammenfassen in

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{div}\mathfrak{w}'+i\,(\operatorname{rot}\mathfrak{w}')_N&=2\,\frac{\partial\mathfrak{W}'}{\partial\mathfrak{z}}=\lambda\,m^2\,\overline{\mathfrak{W}}^2\,\frac{d\mathfrak{W}}{d\overline{\mathfrak{z}}}\\&=\left[\lambda_0+\lambda_1\,(m\,W)^2+\lambda_2\,(m\,W)^4+\lambda_3\,(m\,W)^6+\cdots\right](m\,\overline{\mathfrak{W}})^2\,\frac{d\mathfrak{W}}{d\overline{\mathfrak{z}}}\,.\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Dabei ist $\mathfrak{z}=x+iy$ die komplexe Koordinate der Strömungsebene. Die überstrichenen Größen bedeuten die konjugierten Werte der nicht überstrichenen [vgl. Anhang Gl. (3)].

4. Strömung um einen Kreiszylinder. Für die inkompressible Potentialströmung um einen Kreiszylinder vom Halbmesser r_0 gilt für das Geschwindigkeitsverhältnis $\mathfrak{W}=\mathfrak{V}/V_\infty$ in einem Punkte $\mathfrak{z}=re^{i\varphi}$, wenn wir die reelle Achse (x-Achse, $\varphi=0$) mit der Richtung der Anströmgeschwindigkeit $\mathfrak{V}_\infty$ zusammenfallen lassen und den Koordinaten-Nullpunkt in den Kreismittelpunkt legen.

$$\overline{\mathfrak{W}}=1-\frac{r_0^2}{\mathfrak{z}^2}=1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 e^{-2i\varphi}, \tag{35}$$

also

$$\mathfrak{W}=1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 e^{2i\varphi}, \tag{36}$$

$$W^2 = \mathsf{W}\,\overline{\mathsf{W}} = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 (e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}) + \left(\frac{r_0}{r}\right)^4, \tag{37}$$

$$\frac{d\overline{\mathsf{W}}}{dz} = 2\frac{r_0^2}{z^3} = \frac{2}{r_0}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3 e^{-3i\varphi}, \tag{38}$$

$$\frac{d\mathsf{W}}{d\bar{z}} = \overline{\left(\frac{d\overline{\mathsf{W}}}{dz}\right)} = \frac{2}{r_0}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3 e^{3i\varphi}, \tag{39}$$

$$\overline{\mathsf{W}}^2 \frac{d\mathsf{W}}{d\bar{z}} = \frac{2}{r_0}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^3 e^{3i\varphi} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^5 e^{i\varphi} + \left(\frac{r_0}{r}\right)^7 e^{-i\varphi}\right]. \tag{40}$$

Der letzte Ausdruck ist das mit $m^2\lambda_0$ zu multiplizierende Glied der rechten Seite von (34). Durch Multiplikation dieses Ausdruckes mit dem für W^2 nach (37) und mit m^2 erhalten wir den entsprechenden zu λ_1 gehörigen Ausdruck, durch nochmalige Multiplikation mit m^2 und der rechten Seite von (37) den zu λ_2 gehörigen usw. Die Zahl der Glieder wächst dabei stark an, weshalb wir hier die ausführliche Rechnung unterdrücken, nur ihren Gang schildern und das Endresultat (48) angeben.

Beim Einführen von (37) und (40) in (34) treten als Faktoren Potenzen von m^2 auf. Diese hängen gemäß (27) und Abb. 3 mit der *Mach*schen Zahl der Anströmung im Unendlichen der kompressiblen Strömung zusammen. Da

$$e^{i\nu\varphi} = \cos\nu\varphi + i\sin\nu\varphi \tag{41}$$

ist, so erhalten wir durch Trennung des Real- und Imaginärteiles aus (34)

$$\operatorname{div}\mathfrak{w}' = 2m^2\frac{\lambda_0}{r_0}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\cos 3\varphi - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^5\cos\varphi + \left(\frac{r_0}{r}\right)^7\cos\varphi\right] + 2m^4\frac{\lambda_1}{r_0}[\ldots] + \cdots, \tag{42}$$

$$(\operatorname{rot}\mathfrak{w}')_N = 2m^2\frac{\lambda_0}{r_0}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\sin 3\varphi - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^5\sin\varphi - \left(\frac{r_0}{r}\right)^7\sin\varphi\right] + 2m^4\frac{\lambda_1}{r_0}[\ldots] + \cdots. \tag{43}$$

Die erste dieser beiden Gleichungen stellt ein Quellenfeld, die zweite ein Wirbelfeld dar, bei dem auf jedem Kreise um den Nullpunkt die Verteilung durch ein trigonometrisches Polynom ausgedrückt ist, das aus Gliedern von der Form $\cos\nu\varphi$ bzw. $\sin\nu\varphi$ besteht. Diese Darstellung hat das Angenehme, daß wir das zugehörige Geschwindigkeitsfeld ohne lange Rechnung angeben können. Sind auf einem Kreise vom Halbmesser r Quellen mit der Ergiebigkeit $\varepsilon\cos\nu\varphi$ je Längeneinheit verteilt, wobei ε konstant sein soll, so ergeben diese in einem Punkte $r_1 e^{i\varphi_1}$ ein Feld mit der Geschwindigkeit w_ε, für das die einfache Beziehung gilt

$$\frac{\mathsf{w}_\varepsilon}{e^{i\varphi_1}} = -\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{r_1}{r}\right)^{(\nu-1)}(\cos\nu\varphi_1 - i\sin\nu\varphi_1) = -\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{r_1}{r}\right)^{(\nu-1)} e^{-i\nu\varphi_1}, \tag{44}$$

wenn $r_1 < r$ ist, bzw.

$$\frac{\mathsf{w}_\varepsilon}{e^{i\varphi_1}} = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{(\nu+1)} e^{i\nu\varphi_1} \tag{45}$$

für $r_1 > r$. Dabei stellt wegen der Division mit $e^{i\varphi_1}$ der Realteil der rechten Seite, also das Glied mit cos, die Radialkomponente und der Imaginärteil, das sin-Glied, die Tangentialkomponente von w_ε dar.

Sind auf dem Kreise vom Halbmesser r Wirbel mit der Zirkulation $\gamma\sin\nu\varphi$ je Längeneinheit verteilt, so ist die Geschwindigkeit w_γ des zugehörigen Feldes im Punkte $r_1 e^{i\varphi_1}$ gegeben durch

$$\frac{\mathsf{w}_\gamma}{e^{i\varphi_1}} = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{r_1}{r}\right)^{(\nu-1)} e^{-i\nu\varphi_1} \qquad \text{für } r_1 < r, \tag{46}$$

$$\frac{\mathsf{w}_\gamma}{e^{i\varphi_1}} = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{(\nu+1)} e^{i\nu\varphi_1} \qquad \text{für } r_1 > r. \tag{47}$$

Dabei stellen wieder Real- und Imaginärteil die Radial- und Tangentialkomponente von w_γ dar.

Wie man durch Vergleich von (44) und (46) erkennt, heben sich für $r_1 < r$ das Quellenfeld und das Wirbelfeld gerade auf, wenn $\varepsilon = \gamma$ ist. Für $r_1 > r$ heben sie sich auf, wenn $\varepsilon = -\gamma$ ist. Da das gesamte Strömungsgebiet und damit das ganze Wirbelfeld außerhalb des umströmten Kreises liegt, also stets $r_0 < r$ ist, so heben sich bei der Berechnung der Geschwindigkeit auf der Zylinderoberfläche, also auf dem Kreise mit dem Halbmesser r_0 alle Anteile der Quellen- und Wirbelfelder auf, bei denen in (42) und (43) die einzelnen Glieder gleiche Vorzeichen haben, da ja ihre Beträge ohnehin gleich sind.

Die Verteilung der Quellen und Wirbel nach (42) und (43) setzt sich aus Gliedern von der Form $(r_0/r)^\mu\cos\nu\varphi$ bzw. $(r_0/r)^\mu\sin\nu\varphi$ zusammen, wobei $\mu \geqq 3$ ist. Das Feld einer solchen Quellen- oder Wirbelverteilung erhalten wir durch Integration über r aus den Ausdrücken (44) bis (47), wobei für ε bzw. γ jeweils $(r_0/r)^\mu$ einzusetzen ist. Da hierbei der Integrand verschieden

ist, je nachdem $r <$ oder $> r_1$ ist, so müssen wir die Integrale von r_0 (Zylinderoberfläche) bis r_1 und von r_1 bis ∞ getrennt berechnen. Führen wir die Rechnung in dieser Weise durch, so erhalten wir schließlich folgende Formel:

$$
\begin{aligned}
\frac{w'}{e^{i\varphi}} = {} & \lambda_0 m^2 \left\{ \left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 \right] e^{3i\varphi} + 2\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 \right] e^{i\varphi} \underline{- \frac{1}{3}\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^6 e^{-i\varphi} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 e^{i\varphi} \right]} \right\} + \\
& + \lambda_1 m^4 \left\{ - \left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^6 \right] e^{5i\varphi} + \left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 \right] e^{3i\varphi} - 3\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^6 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 \right] e^{3i\varphi} + \right. \\
& \quad + 3\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 \right] e^{i\varphi} + \left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^8 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 \right] e^{i\varphi} \underline{- \left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^6 e^{-i\varphi} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 e^{i\varphi} \right] -} \\
& \quad \underline{- \frac{1}{5}\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{10} e^{-i\varphi} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 e^{i\varphi} \right] + \frac{1}{5}\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^8 e^{-3i\varphi} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 e^{3i\varphi} \right]} \left. \right\} + \\
& + \lambda_2 m^6 \left\{ \left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^6 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^8 \right] e^{7i\varphi} - 2\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^6 \right] e^{5i\varphi} + 4\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^8 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^6 \right] e^{5i\varphi} + \right. \\
& \quad + \left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 \right] e^{3i\varphi} - 8\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^6 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 \right] e^{3i\varphi} - 2\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{10} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 \right] e^{3i\varphi} + \\
& \quad + 4\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 \right] e^{i\varphi} + 4\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^8 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 \right] e^{i\varphi} + \frac{4}{5}\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 \right] e^{i\varphi} - \\
& \quad \underline{- 2\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^6 e^{-i\varphi} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 e^{i\varphi} \right] - \frac{8}{5}\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{10} e^{-i\varphi} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 e^{i\varphi} \right] -} \\
& \quad \underline{- \frac{1}{7}\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{14} e^{-i\varphi} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 e^{i\varphi} \right] + \frac{4}{5}\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^8 e^{-3i\varphi} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 e^{3i\varphi} \right] +} \\
& \quad \underline{+ \frac{2}{7}\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{12} e^{-3i\varphi} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 e^{3i\varphi} \right] - \frac{1}{7}\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{10} e^{-5i\varphi} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^6 e^{5i\varphi} \right]} \left. \right\} + \\
& + \lambda_3 m^8 \left\{ - \left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^8 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{10} \right] e^{9i\varphi} + 3\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^6 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^8 \right] e^{7i\varphi} - 5\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{10} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^8 \right] e^{7i\varphi} - \right. \\
& \quad - 3\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^6 \right] e^{5i\varphi} + 15\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^8 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^6 \right] e^{5i\varphi} + \frac{10}{3}\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^6 \right] e^{5i\varphi} + \\
& \quad + \left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 \right] e^{3i\varphi} - 15\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^6 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 \right] e^{3i\varphi} - 10\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{10} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 \right] e^{3i\varphi} - \\
& \quad - 2\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{14} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 \right] e^{3i\varphi} + 5\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 \right] e^{i\varphi} + 10\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^8 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 \right] e^{i\varphi} + \\
& \quad + 6\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 \right] e^{i\varphi} + \frac{5}{7}\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{16} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 \right] e^{i\varphi} - \\
& \quad \underline{- \frac{10}{3}\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^6 e^{-i\varphi} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 e^{i\varphi} \right] - 6\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{10} e^{-i\varphi} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 e^{i\varphi} \right] -} \\
& \quad \underline{- \frac{15}{7}\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{14} e^{-i\varphi} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 e^{i\varphi} \right] - \frac{1}{9}\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{18} e^{-i\varphi} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 e^{i\varphi} \right] +} \\
& \quad \underline{+ 2\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^8 e^{-3i\varphi} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 e^{3i\varphi} \right] + \frac{15}{7}\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{12} e^{-3i\varphi} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 e^{3i\varphi} \right] +} \\
& \quad \underline{+ \frac{1}{3}\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{16} e^{-3i\varphi} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 e^{3i\varphi} \right] - \frac{5}{7}\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{10} e^{-5i\varphi} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^6 e^{5i\varphi} \right] -} \\
& \quad \underline{- \frac{1}{3}\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{14} e^{-5i\varphi} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^6 e^{5i\varphi} \right] + \frac{1}{9}\left[\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{12} e^{-7i\varphi} - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^8 e^{7i\varphi} \right]} \left. \right\}.
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Für die Zylinderoberfläche ($r_1 = r_0$) sind nur die unterstrichenen Ausdrücke von Null verschieden. Hierfür wird die Tangentialkomponente (die Radialkomponente ist ebenfalls Null)

$$
\begin{aligned}
\frac{w'}{i e^{i\varphi}} = |w'| = {} & \lambda_0 m^2 \frac{2}{3} \sin\varphi + \lambda_1 m^4 \left(2\frac{2}{5}\sin\varphi - \frac{2}{5}\sin 3\varphi \right) + \\
& + \lambda_2 m^6 \left(7\frac{17}{35}\sin\varphi - 2\frac{6}{35}\sin 3\varphi + \frac{2}{7}\sin 5\varphi \right) + \\
& + \lambda_3 m^8 \left(23\frac{11}{63}\sin\varphi - 8\frac{20}{21}\sin 3\varphi + 2\frac{2}{21}\sin 5\varphi - \frac{2}{9}\sin 7\varphi \right).
\end{aligned}
\tag{49}
$$

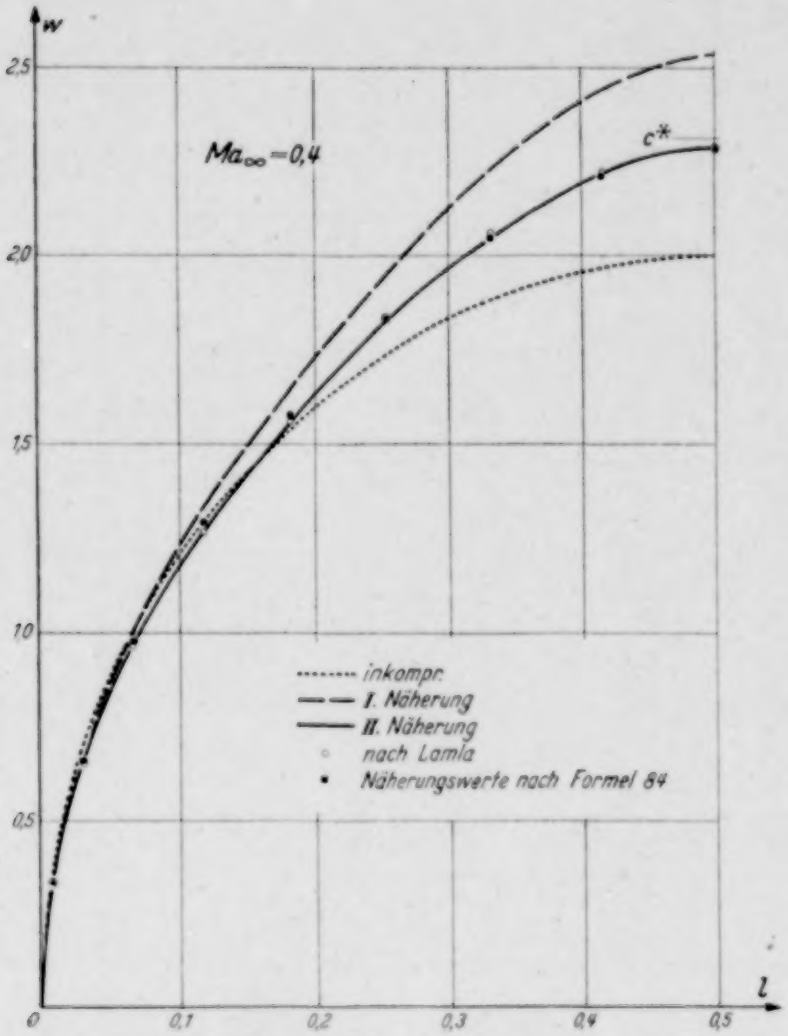

Abb. 5. Näherungswerte beim Kreiszylinder.

wierig und auch unübersichtlich. Man wendet daher hierfür besser das im folgenden dargestellte Verfahren an.

5. Strömung um ein Flügelprofil ohne Zirkulation. In (34)

$$\frac{\partial w'}{\partial z} = \frac{1}{2}\lambda (m\overline{W})^2 \frac{dW}{d\overline{z}}$$

ist $dW/d\overline{z}$ eine nur von $\overline{z}$, nicht aber von z abhängige Funktion. Wenn wir über z integrieren, geht sie unverändert vor das Integralzeichen:

$$w' = \frac{1}{2}\frac{dW}{d\overline{z}} \int_{z_0}^{z} \lambda m^2 \overline{W}^2 \, dz + U(\overline{z}) . \quad (51)$$

U ist dabei die Geschwindigkeit einer Potentialströmung, die ebenfalls nur von $\overline{z}$ und nicht von z abhängt und daher die Rolle einer Integrationskonstanten spielt, indem $\partial U/\partial z = 0$ ist. U wird am Schluß so bestimmt, daß die Randbedingungen erfüllt sind.

Dabei ist λ eine Funktion von $|W|^2$, und da $|W|^2 = W\overline{W}$ ist, hängt es sowohl von z wie von $\overline{z}$ ab. Da wir über z zu integrieren haben, müssen wir λ in Funktionen

Als zweite Näherung erhalten wir

$$w_1 + w_2 = (W + w')\sqrt{\varrho_\infty/\varrho} . \quad (50)$$

Das Ergebnis ist in Abb. 5 für den Kreiszylinder dargestellt. Es stimmt ziemlich gut mit den von *Lamla* mit vier Näherungen nach dem Verfahren von *Janzen-Rayleigh* berechneten Werten überein.

Um auch ein Bild zu erhalten, wie sich die Felder im Inneren der Flüssigkeit verhalten, sind für die Winkel $\varphi = 0^\circ$, $\varphi = \frac{1}{2}^\circ$ und $\varphi = 1^\circ$ die Fehler $w'\sqrt{\varrho_\infty/\varrho}$ für verschiedene Radien r_1 berechnet und nach Größe und Richtung in Abb. 6 dargestellt.

Man könnte das geschilderte Berechnungsverfahren grundsätzlich auch bei beliebigen Profilen anwenden, indem man diese jeweils konform auf einen Kreis abbildet und die trigonometrischen Polynome in dieser Kreisebene berechnet. Da hierbei aber zu den bisher aufgetretenen Funktionen auch noch die Abbildungsfunktion hinzutritt, wird die Zahl der Glieder der trigonometrischen Polynome sehr groß und damit die Rechnung sehr lang-

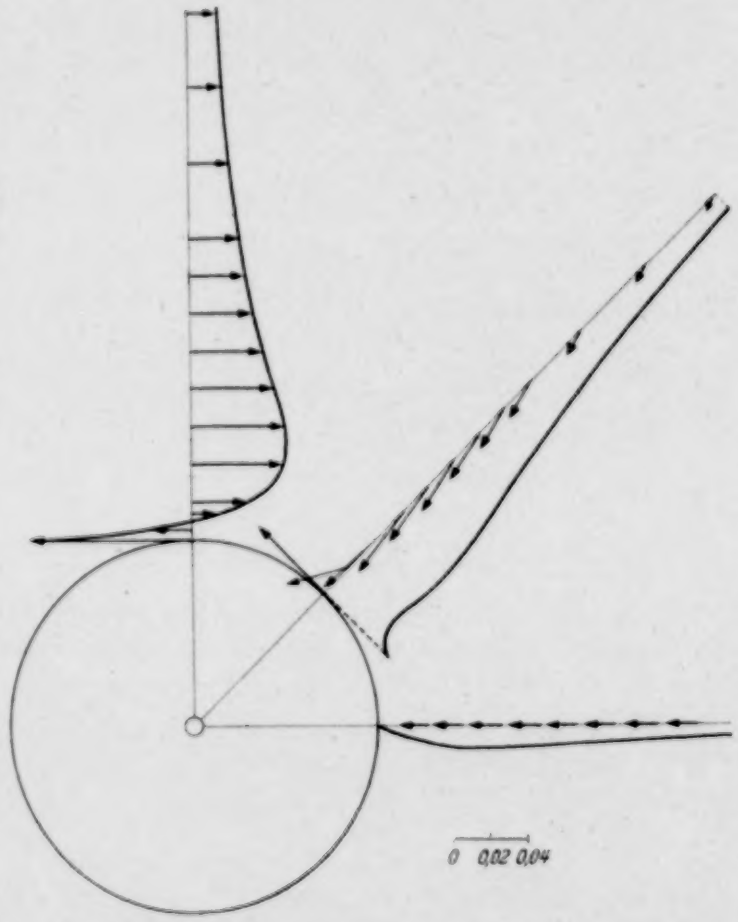

Abb. 6. Größe und Richtung der Korrektur $w'\sqrt{\varrho_\infty/\varrho}$ im Felde eines Kreiszylinders bei $Ma_\infty = 0{,}36$.
Die Kurven geben den Betrag der Korrektur im beigegebenen Maßstab an.

von z und $\bar{z}$ zerlegen, da wir nur bei einer nicht von $\bar{z}$ abhängigen Funktion von z die Integration ausführen können und nur nicht von z abhängige Funktionen von $\bar{z}$ bei der Integration als Konstante zu behandeln sind. Wenn wir für λ die Potenzreihe in W^2 wie in (34) einsetzen und berücksichtigen, daß $W^{2n} = \mathsf{W}^n \overline{\mathsf{W}}^n$ ist, so haben wir in jedem Glied die gewünschte Trennung in eine Funktion W^n, die nur von $\bar{z}$, und eine Funktion $\overline{\mathsf{W}}^n$, die nur von z abhängt. Demnach wird nach (51), wenn wir nur vier Glieder berücksichtigen,

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{w}' = \frac{1}{2}\,\frac{d\mathsf{W}}{d\bar{z}}\Big[\lambda_0 m^2 \int_{z_0}^{z} \overline{\mathsf{W}}^2\, dz + \lambda_1 m^4 \mathsf{W} \int_{z_0}^{z} \overline{\mathsf{W}}^3\, dz + \lambda_2 m^6 \mathsf{W}^2 \int_{z_0}^{z} \overline{\mathsf{W}}^4\, dz + \\ + \lambda_3 m^8 \mathsf{W}^3 \int_{z_0}^{z} \overline{\mathsf{W}}^5\, dz\Big] + \mathsf{U}(\bar{z})\,. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Anstatt die Potentialströmung U für den gesamten Ausdruck zu ermitteln, können wir sie auch auf die einzelnen mit λ_n multiplizierten Glieder aufteilen und für jedes so bestimmen, daß die Teilströmung tangential am Profil verläuft. Wir müssen dann diese Potentialströmung zwar so oft bestimmen als wir Glieder angesetzt haben, also viermal. Wir haben aber den Vorteil, daß wir dann aus diesen Gliedern die Lösung für alle *Mach*schen Zahlen, die sich im Werte von m ausdrücken (Abb. 3), leicht angeben können. Sonst müßten wir für die Gesamtfunktion die Potentialströmung U für jede *Mach*sche Zahl neu ermitteln, was im allgemeinen mehr Arbeit macht. Demgemäß zerlegen wir w' in Teilbeträge

$$\mathsf{w}' = \lambda_0 m^2\, \mathsf{w}_1' + \lambda_1 m^4\, \mathsf{w}_2' + \lambda_2 m^6\, \mathsf{w}_3' + \lambda_3 m^8\, \mathsf{w}_4'\,. \tag{53}$$

wobei

$$\mathsf{w}_n' = \frac{1}{2}\,\frac{d\mathsf{W}}{d\bar{z}}\,\mathsf{W}^{(n-1)} \int_{z_0}^{z} \overline{\mathsf{W}}^{(n+1)}\, dz + \mathsf{U}_n(\bar{z}) \tag{54}$$

ist.

Als Ausgangspunkt z_0 für die Integrale wählen wir zweckmäßig die Flügelhinterkante und als Integrationsweg zunächst die Profiloberfläche, die wir entgegen dem Uhrzeigersinn umfahren. Die abgewickelte Länge von der Hinterkante bis zu dem gerade betrachteten Punkt P bezeichnen wir mit s. Wir erhalten für das n-te Glied für einen Punkt der Oberfläche

$$\int_{z_0}^{z} \overline{\mathsf{W}}^{(n+1)}\, dz = \int_{0}^{s} (\mp |\mathsf{W}|)^{(n+1)} (\cos n\vartheta - i \sin n\vartheta)\, ds = I_n + i\, J_n\,. \tag{55}$$

Dabei ist ϑ der Winkel der Tangente an das Profil mit der x-Achse (Abb. 7). Das obere Zeichen vor $|\mathsf{W}|$ bezieht sich auf die Oberseite, das untere auf die Unterseite des Profils.

Zur Berechnung des Integrals in (55) brauchen wir nur W und ϑ für eine Reihe von Punkten der Oberfläche zu ermitteln, $W^{(n+1)} \cos n\vartheta$ und $W^{(n+1)} \sin n\vartheta$ über s aufzutragen und die Integralkurven zu bestimmen, welche die beiden Funktionen I_n und J_n darstellen. Den Umfang dieser Arbeit können wir auf die Hälfte verringern, wenn wir folgendes beachten: Da das Integral eine Integration nach z darstellt, können wir als Integrationskonstante eine beliebige Funktion von $\bar{z}$ hinzufügen oder abziehen. Eine solche Funktion ist

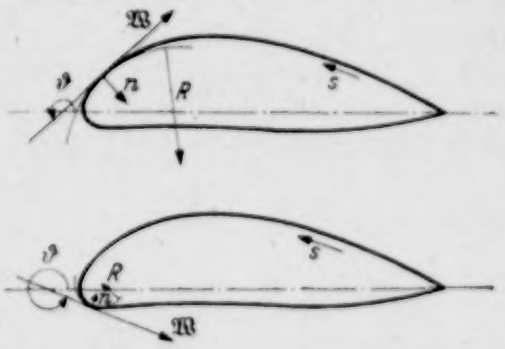

Abb. 7. Festlegung der Bezeichnungen.

$$\int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \mathsf{W}^{(n+1)}\, d\bar{z} = \int_{0}^{s} (\mp |\mathsf{W}|)^{(n+1)} (\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta)\, ds = I_n - i\, J_n\,. \tag{56}$$

Wir können daher anstatt des Integrales in (55) auch das Integral

$$\int_{z_0}^{z} \overline{\mathsf{W}}^{(n+1)}\, dz - \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \mathsf{W}^{(n+1)}\, d\bar{z} = -2i \int_{0}^{s} (\mp |\mathsf{W}|)^{(n+1)} \sin n\vartheta\, ds = 2\, i\, J_n \tag{57}$$

berechnen. Wir brauchen dann anstatt der zwei Integrationen für den Real- und Imaginärteil nur eine für den Imaginärteil auszuführen. Die hier vorgenommene Änderung wird durch eine entsprechende Änderung der noch zu bestimmenden Funktion U_n ausgeglichen.

Wir können die zu integrierenden Werte anstatt längs der Abwicklung des Profilumfanges auch längs seiner Abbildung auf den Kreis der ζ-Ebene durch $z = f(\zeta)$ auftragen. Der Halbmesser dieses Kreises sei a, sein Rand durch $\zeta = a\, e^{i\varphi}$ gegeben. Wir setzen also

$$ds = a\,|f'(\zeta)|\,d\varphi, \tag{58}$$

beachten, daß für die Geschwindigkeit

$$\mp |W| = -\frac{2\sin\varphi}{|f'(\zeta)|} \tag{59}$$

gilt und erhalten anstatt (57)

$$\int_{z_0}^{z} \overline{W}^{(n+1)}\,dz - \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} W^{(n+1)}\,d\bar{z} = 4\,a\,i \int_{0}^{\varphi} \sin n\vartheta\,(\mp W)^n \sin\varphi\,d\varphi = 2\,i\,J_n. \tag{60}$$

Durch die Integration erhalten wir die Funktion J_n abhängig von der Bogenlänge s bzw. dem ihr bei der konformen Abbildung des Profiles auf einen Kreis entsprechenden Winkel φ des Kreises für jeden Punkt der Profiloberfläche. Wir müssen nun diese Werte noch mit

$$\frac{dW}{d\bar{z}}\,W^{(n-1)} = \left(\frac{\partial W}{\partial s} + i\,W\,\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\right) W^{(n-1)}\,e^{i(n+1)\vartheta}\,(\mp 1)^n \tag{61}$$

multiplizieren. Dabei ist

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial s} = \frac{1}{R} \tag{62}$$

der reziproke Krümmungsradius der Profilkurve an der betreffenden Stelle, und

$$-W\,\frac{\partial\vartheta}{\partial s} = \frac{\partial W}{\partial n} \tag{63}$$

ist der Differentialquotient von W in der Richtung $dn \perp ds$ (Abb. 7). Real- und Imaginärteil des Ausdruckes

$$(w_n' - U_n)\,e^{-i\vartheta} = e^{in\vartheta}\,W^{(n-1)}\left(\frac{\partial W}{\partial s} + i\,W\,\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\right) i\,J_n(\mp 1)^n \tag{64}$$

stellen die Tangential- und Normalkomponente T_n und N_n der Geschwindigkeit $w_n' - U_n$ auf der Profiloberfläche dar. Diese ergeben sich zu

$$T_n = -W^{(n-1)}J_n\left(\frac{\partial W}{\partial s}\sin n\vartheta + \frac{W}{R}\cos n\vartheta\right)(\mp 1)^n, \tag{65}$$

$$N_n = W^{(n-1)}J_n\left(\frac{\partial W}{\partial s}\cos n\vartheta - \frac{W}{R}\sin n\vartheta\right)(\mp 1)^n. \tag{66}$$

Um für die Geschwindigkeit w_n' die Normalkomponente zum Verschwinden zu bringen, müssen wir die Potentialströmung U_n so bestimmen, daß ihre Normalkomponente gleich $-N_n$ wird. Durch diese Forderung und die Bedingung, daß die Strömung frei von Singularitäten sein und im Unendlichen verschwinden muß, ist U_n eindeutig bestimmt. Die Berechnung dieser Potentialströmung ist nach bekannten Verfahren leicht möglich. Sie wird noch dadurch erleichtert, daß von der Berechnung der Potentialströmung W, von der ja das ganze Rechenverfahren ausgeht, in der Regel ohnehin schon Hilfsmittel vorliegen, wie z. B. die konforme Abbildung des Profiles auf den Kreis. Zur Erhöhung der Rechengenauigkeit empfiehlt es sich, von dem Integral J_n (60) noch eine Konstante abzuziehen. Zweckmäßig wählt man dafür den Wert von J_n im Punkte $\varphi = \pi$.

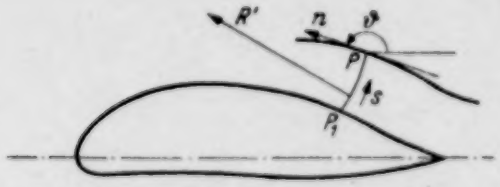

Abb. 8. Integrationsweg quer zur Strömung.

Im allgemeinen ist das praktische Bedürfnis mit der Berechnung der Geschwindigkeits- bzw. Druckverteilung längs der Profiloberfläche befriedigt. Wenn aber in manchen Fällen auch die Geschwindigkeit im Innern der Flüssigkeit interessiert, so ist die Berechnung ebenfalls ohne besondere Schwierigkeit möglich. Wir wählen dazu den Integrationsweg längs der Oberfläche, also längs einer Stromlinie, bis zu einem Punkte P_1 der gleiches Potential hat wie der Punkt P, dessen Geschwindigkeit berechnet werden soll, und setzen dann den Integrationsweg längs der betreffenden Potentiallinie fort (Abb. 8). Für den ersten Teil des Integrationsweges gilt das bereits geschilderte Verfahren. Bei der Integration längs der Potentiallinie ist wie bisher $\overline{W} = \mp W e^{-i\vartheta}$ und $dz = -i e^{i\vartheta} ds'$, wobei ϑ die positive bzw. negative Richtung der Strömung angibt und

ds' das Wegelement längs des Integrationsweges, also jetzt längs der Potentiallinie, ist. Es wird also entsprechend (55)

$$\int_{P_1}^{P} \overline{\mathsf{W}}^{(n+1)}\, d\mathsf{z} = -\int_{P_1}^{P} (\mp W)^{n+1} (\sin n\vartheta + i \cos n\vartheta)\, ds' . \tag{67}$$

An Stelle des entsprechenden Faktors in (61) tritt wegen der Differentiation längs der Potentiallinie

$$\frac{d\mathsf{W}}{d\bar{\mathsf{z}}} = \pm e^{2i\vartheta} \left(i \frac{\partial W}{\partial s'} - \frac{W}{R'} \right), \tag{68}$$

wobei R' der Krümmungsradius der Potentiallinie und

$$\frac{W}{R'} = -\frac{\partial W}{\partial n'} , \tag{69}$$

d. h. der negative Differentialquotient von W senkrecht zur Richtung des Integrationsweges ist.

6. Strömung um ein Flügelprofil mit Zirkulation. Wird ein Kreis um den Nullpunkt mit dem Halbmesser a unter einem Winkel α angeströmt und gefordert, daß der hintere Staupunkt unverändert im Schnittpunkt des Kreises mit der x-Achse bleiben soll, so muß der Strömung nach (36) eine Zirkulationsströmung mit der Zirkulation

$$\Gamma = -4\, a\pi \sin\alpha \tag{70}$$

überlagert werden, die auch bei konformer Abbildung auf das Flügelprofil unter Beibehaltung des Unendlichen erhalten bleibt.

Die Geschwindigkeit im Außengebiet des Kreises bei Anströmung unter dem Winkel α und der Zirkulation Γ gemäß (70) ist

$$\mathsf{W}_{Kr} = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} a^2/\underline{\bar{\zeta}}^2 - i(a/\underline{\bar{\zeta}})\, 2 \sin\alpha . \tag{71}$$

Am Kreisrande wird ihr Betrag

$$|\mathsf{W}_{Kr}| = 2\, |\sin(\varphi - \alpha) + \sin\alpha| . \tag{72}$$

Die Geschwindigkeit am Flügelprofil errechnet sich hieraus mittels der Abbildungsfunktion $\mathsf{z} = \mathsf{f}(\underline{\zeta})$ bzw. $d\mathsf{z}/d\underline{\zeta} = \mathsf{f}'(\underline{\zeta})$ zu

$$\mathsf{W} = \frac{\mathsf{W}_{Kr}}{\overline{\mathsf{f}'}} . \tag{73}$$

Das Integral $\int_{z_0}^{z} \overline{\mathsf{W}}\, dz$ stellt den Unterschied der komplexen Potentiale in den Punkten z und z_0 dar. Für eine geschlossene Kurve, bei der z und z_0 zusammenfallen, ist dieses Integral im Falle einer zirkulationsfreien Strömung gleich Null. Ist aber eine Zirkulation vorhanden, so ist das geschlossene Integral

$$\oint \overline{\mathsf{W}}\, d\mathsf{z} = \Gamma . \tag{74}$$

Die Potentiale sind in diesem Falle nicht mehr eindeutig, sondern können beliebig viele, sich um ganze Vielfache von Γ unterscheidende Werte annehmen. In entsprechender Weise sind dann auch die allgemeineren Integrale

$$\oint \overline{\mathsf{W}}^n\, d\mathsf{z} \neq 0 \tag{75}$$

und dementsprechend die Integrale $\int_{z_0}^{z} \overline{\mathsf{W}}^n\, d\mathsf{z}$ mehrdeutig.

Um die Art der Mehrdeutigkeit dieser Integrale festzustellen, denken wir uns die Abbildungsfunktion in eine Potenzreihe entwickelt:

$$\mathsf{f}(\underline{\zeta}) = \underline{\zeta} + \mathsf{b}_0 + \frac{\mathsf{b}_1}{\underline{\zeta}} + \frac{\mathsf{b}_2}{\underline{\zeta}^2} + \cdots ; \tag{76}$$

dann wird

$$\left(\frac{1}{\mathsf{f}'(\underline{\zeta})}\right)^n = 1 + \frac{\mathsf{k}_1}{\underline{\zeta}^2} + \frac{\mathsf{k}_2}{\underline{\zeta}^3} + \cdots \tag{77}$$

und

$$\int \overline{\mathsf{W}}^{(n+1)}\, d\mathsf{z} = \int \frac{\overline{\mathsf{W}}_{Kr}{}^{(n+1)}}{\mathsf{f}'^n}\, d\underline{\zeta} = \int \left((e^{-i(n+1)\alpha} + 2\,(n+1)\, i\, a \frac{e^{-in\alpha}}{\underline{\zeta}} \sin\alpha + \cdots) \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{\mathsf{k}_1}{\underline{\zeta}^2} + \frac{\mathsf{k}_2}{\underline{\zeta}^3} + \cdots\right) d\underline{\zeta} . \right. \tag{78}$$

Bei der Integration ist nur das Glied mit der Potenz $1/\underline{\zeta}$ mehrdeutig. Es ergibt

$$2(n+1)\,i\,a\,e^{-in\alpha}\sin\alpha\int\frac{d\underline{\zeta}}{\underline{\zeta}}=2(n+1)\,i\,a\,e^{-in\alpha}\sin\alpha\ln\frac{\underline{\zeta}}{a}. \tag{79}$$

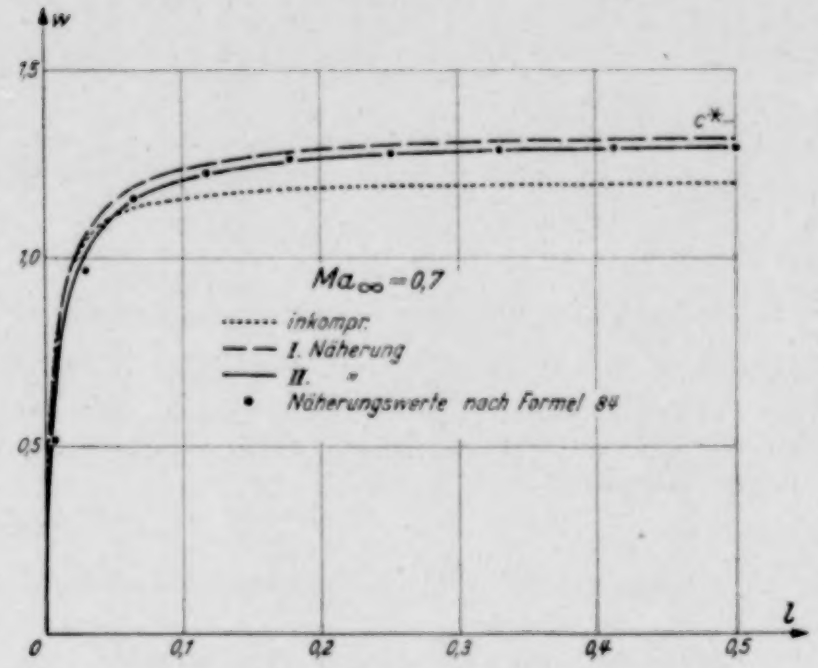

Abb. 9. Geschwindigkeit am elliptischen Zylinder vom Dickenverhältnis 0,2.

Um die störende Mehrdeutigkeit dieses Gliedes zum Verschwinden zu bringen, addieren wir das bezüglich $\underline{\zeta}$ dazu konjugiert komplexe

$$2(n+1)\,i\,a\,e^{-in\alpha}\sin\alpha\ln\frac{\overline{\underline{\zeta}}}{a},$$

das die gleiche Mehrdeutigkeit mit dem umgekehrten Vorzeichen hat. Es ist eine Funktion von $\overline{z}$ bzw. $\overline{\underline{\zeta}}$, kann daher bei der Integration über $\underline{\zeta}$ als Integrationskonstante hinzugefügt und durch entsprechende Änderung der noch offenen Funktion U ausgeglichen werden. In analoger Weise ergibt die nach (57) hinzugefügte Funktion $\int \mathsf{W}^{(n+1)}\,d\overline{z}$ den mehrdeutigen Anteil

$$-2(n+1)\,i\,a\,e^{in\alpha}\sin\alpha\ln\frac{\overline{\underline{\zeta}}}{a}.$$

Dieser ist selbst schon eine Funktion von $\overline{\underline{\zeta}}$ und kann daher durch Subtraktion beseitigt werden. Wenn wir noch

$$\underline{\zeta}=re^{i\varphi}\qquad\text{bzw.}\qquad\ln\frac{\overline{\underline{\zeta}}}{a}=\ln\frac{r}{a}-i\varphi \tag{80}$$

setzen, erhalten wir an Stelle von (57) bzw. (60) die erweiterte Gleichung

$$2\,i\,J_n=\int_{z_0}^{z}\overline{\mathsf{W}}^{(n+1)}\,dz-\int_{\overline{z}_0}^{\overline{z}}\mathsf{W}^{(n+1)}\,d\overline{z}+2\,i\,(n+1)\,a\,(e^{-in\alpha}-e^{in\alpha})\sin\alpha\ln\frac{\overline{\underline{\zeta}}}{a}. \tag{81}$$

Bei der Integration längs des Kreisrandes $\underline{\zeta}=a\,e^{i\varphi}$ wird

$$\left.\begin{aligned}J_n=2a\int_0^{\varphi}(\mp W)^n\sin n\vartheta\;\times\\ \times\left[\sin(\varphi-\alpha)+\sin\alpha\right]d\varphi-\\ -2(n+1)\,a\varphi\sin n\alpha\sin\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Die weitere Rechnung ist die gleiche wie beim Flügel ohne Zirkulation.

Im allgemeinen wird die so berechnete Korrekturströmung eine Umströmung der Hinterkante ergeben, und zwar tritt diese bei der zusätzlichen Potentialströmung U auf. Wir müssen nun, um glatten Abfluß an der Hinterkante zu erzielen, auch die Korrektur der Zirkulation anbringen. Ergibt die Potentialströmung in der $\underline{\zeta}$-Ebene in dem der Hinterkante entsprechenden Punkte eine Geschwindigkeit U_0, so ist eine Zirkulation

$$\Gamma=-2\pi a\,U_0 \tag{83}$$

zu überlagern.

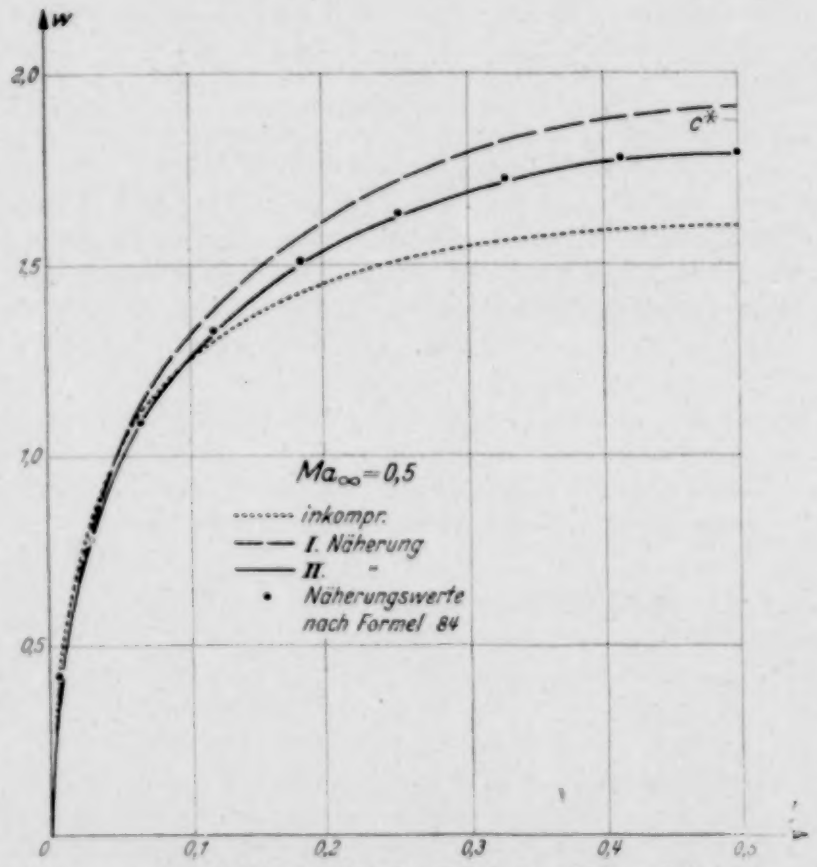

Abb. 10. Geschwindigkeit am elliptischen Zylinder vom Dickenverhältnis 0,6.

7. Eine praktische Rechenformel. In Abb. 9 bis 14 sind die nach dem geschilderten Verfahren berechneten Geschwindigkeitsverteilungen für einige Ellipsen und einige Flügelprofile dargestellt, und zwar jeweils für die inkompressible Strömung ($Ma_\infty \ll 1$) und die erste und zweite Näherung für die kompressible Strömung bei einer *Mach*schen Zahl, die eine maximale örtliche Geschwindigkeit ergibt, die nur wenig unterhalb der Schallgeschwindigkeit liegt[1]. Man ersieht aus den Kurven, daß die Differenz der zweiten und ersten Näherung im allgemeinen entgegengesetzt gerichtet und kleiner ist als die Differenz der ersten und nullten Näherung (wenn man als solche die Geschwindigkeit der inkompressiblen Strömung bezeichnet).

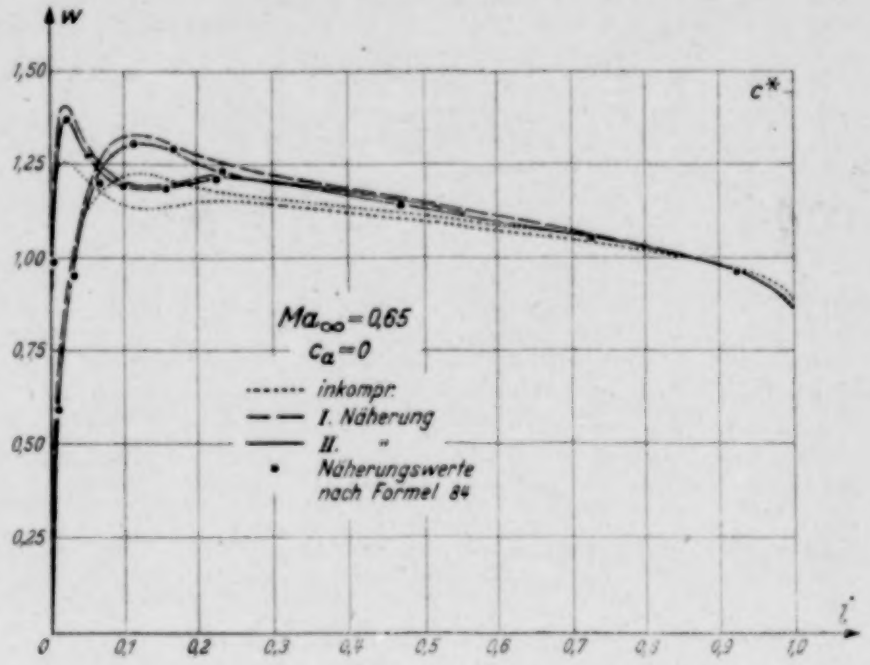

Abb. 11. Geschwindigkeit am Profil NACA 230 –12.

Man ersieht aber auch, daß die durch die zweite Näherung gegenüber der ersten gegebene Korrektur einen ziemlich einfachen Verlauf über die Flügeltiefe hat und nirgends besonders große Werte erreicht. Dies legt den Gedanken nahe, eine Formel zu suchen, welche die berechneten Korrekturwerte einigermaßen gut wiedergibt, aber nur von einigen wenigen leicht feststellbaren Größen abhängt.

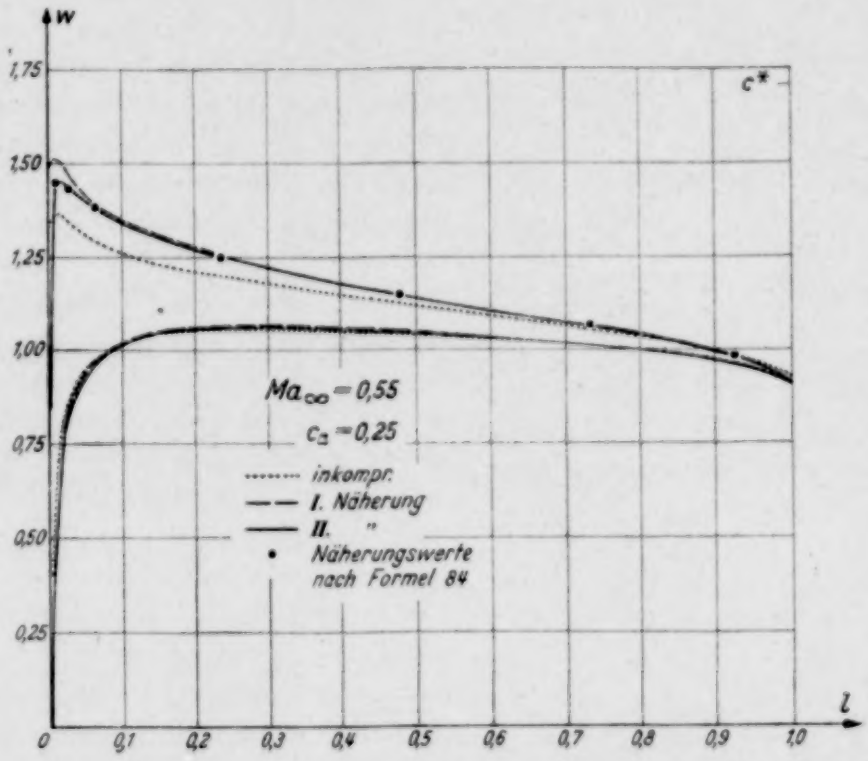

Abb. 12. Geschwindigkeit am Profil NACA 0009 –1,130.

Zunächst ließ sich an Hand der berechneten Strömungen um Ellipsen für die Maximalwerte der Geschwindigkeit eine Beziehung finden, welche nur die *Mach*sche Zahl der Anströmung und die örtliche inkompressible Geschwindigkeit enthält. Für die Punkte außerhalb der Symmetrieachse ist noch ein Einfluß des Geschwindigkeitsgradienten dW/dx zu berücksichtigen. Für Profile, bei denen die Geschwindigkeitsverteilung unsymmetrisch zur Profilmitte ist, tritt hierzu noch ein Faktor, der von der Lage des Geschwindigkeitsmaximums abhängt. Die Formel für die endgültige Geschwindigkeit w, die auf diesen Parametern aufgebaut und durch Probieren den genauen Werten möglichst gut angepaßt ist, lautet

$$w = W\sqrt{\frac{\varrho_\infty}{\varrho}} - 0{,}44\,W^2\left[W^2-1\right]^2 Ma_\infty^{4,5} - 0{,}4\,\frac{\xi}{l}\left(1-\frac{\xi}{l}\right)\left(1-2\,\frac{x}{l}\right) Ma_\infty^3\, W^{3,5}\,\frac{dW}{d(x/l)}\,. \qquad (84)$$

[1] Eine ausführlichere Darstellung der Berechnung der Strömung um Ellipsen und der Folgerungen daraus soll in einem besonderen Bericht von *E. Krahn* erfolgen.

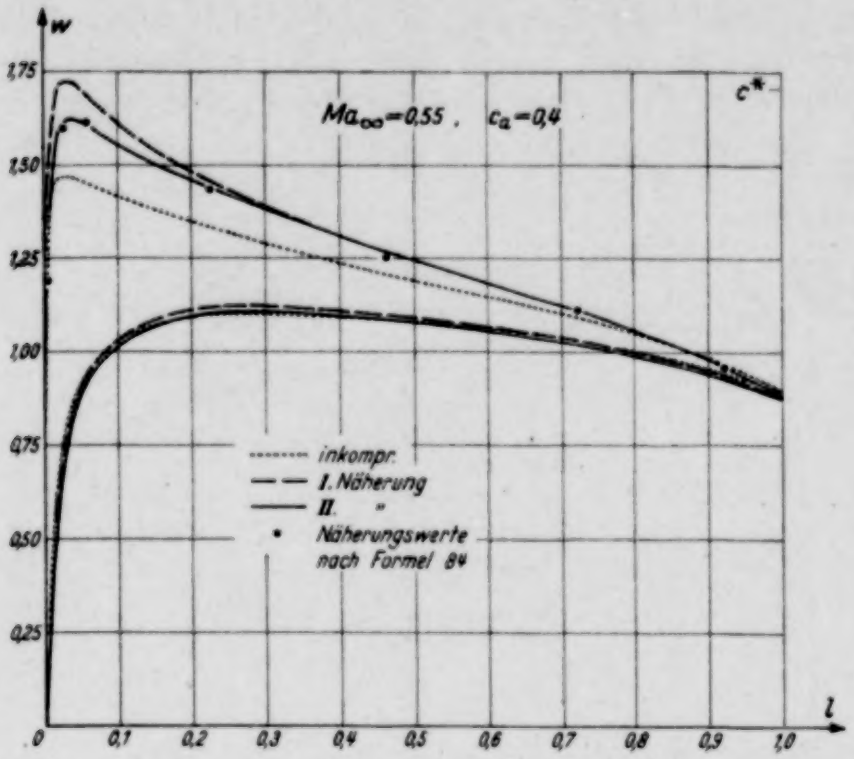

Abb. 13. Geschwindigkeit im Profil NACA 0015—1,130.

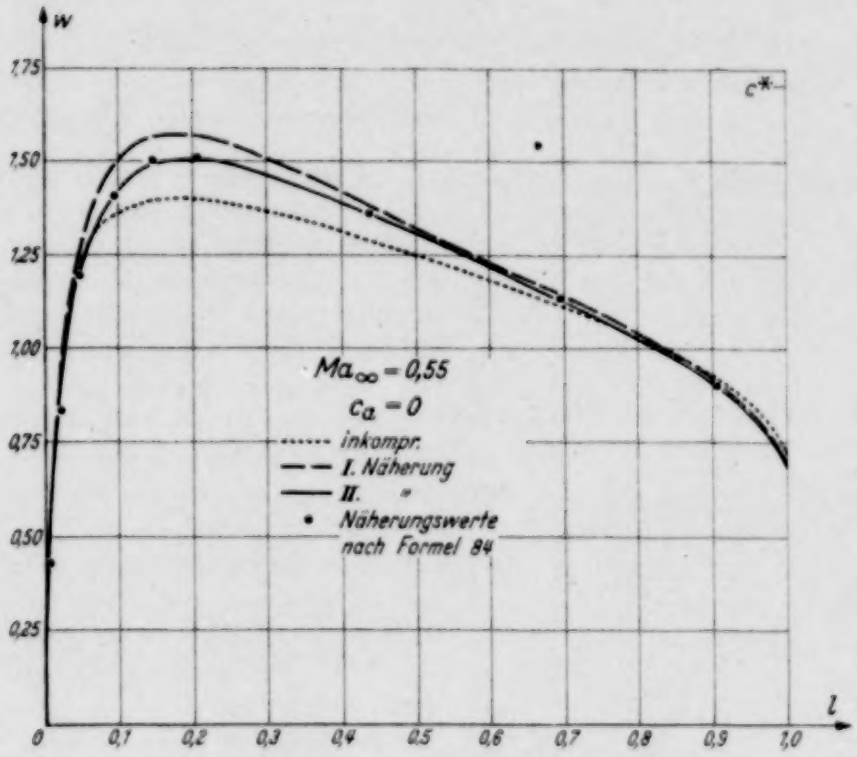

Abb. 14. Geschwindigkeit im Profil NACA 0030—1,130.

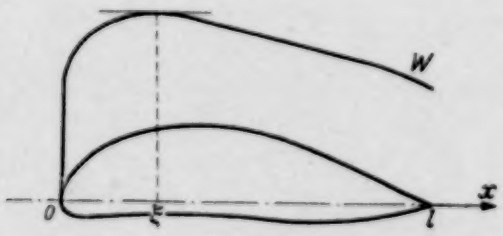

Abb. 15. Lage des Geschwindigkeitsmaximums.

Hierin bedeutet l die Profiltiefe, ξ die Entfernung des Geschwindigkeitsmaximums von der Vorderkante und x die laufende Abszisse (Abb. 15).

In Abb. 5 und 9 bis 14 sind einige nach dieser Formel berechnete Werte eingetragen. Sie zeigen eine recht gute Übereinstimmung mit der zweiten Näherung.

8. Zusammenfassung. Zur Berechnung der Strömung einer kompressiblen Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ kann man von der entsprechenden Geschwindigkeit $\mathfrak{W}$ der inkompressiblen Strömung ausgehen und in erster Näherung $\mathfrak{v}/v_\infty = (\mathfrak{W}/V_\infty)\sqrt{\varrho_\infty/\varrho}$ setzen. Eine zweite Näherung ergibt sich aus dem Felde von Quellen und Wirbeln, die bei der ersten Näherung vernachlässigt sind. Die zur Berechnung dieses Feldes nötige Integration über die ganze Strömungsebene kann wesentlich vereinfacht werden, indem man entweder in einer Ebene, in welcher der umströmte Rand ein Kreis ist, die Belegung der Quellen und Wirbel durch trigonometrische Polynome ausdrückt, deren Felder leicht anzugeben sind, oder indem man das Flächenintegral auf ein Randintegral zurückführt. Nach der ersten Methode wurde die Strömung um einen Kreiszylinder, nach der zweiten die um Ellipsen und Flügelprofile berechnet. Um für die Praxis die immerhin ziemlich umständliche Berechnung der zweiten Näherung zu ersparen, wurde auf Grund der berechneten Korrekturen eine praktische Rechenformel zur Abschätzung dieser Korrektur angegeben [Gleichung (84)], welche die berechneten Werte gut wiedergibt.

Anhang.

Einige Vektoroperationen in komplexer Schreibweise[1]. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Vektor mit den Komponenten a_1 und a_2 im rechtwinkligen (x, y)-Koordinatensystem. Entsprechendes gilt für $\mathfrak{b}$. Die Bedeutung der Zeichen $\cdot$, $\times$, div, rot, grad ist durch folgende Vorschriften festgelegt, wobei $(\,)_N$ die zur (x, y)-Ebene normale Komponente bedeutet:

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2\,, \qquad (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})_N = a_1 b_2 - a_2 b_1\,. \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y}\,, \qquad (\operatorname{rot}\mathfrak{a})_N = \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\,, \tag{2}$$

Der Ausdruck $\operatorname{grad}|\mathfrak{a}|$ hat die Komponenten $\frac{\partial|\mathfrak{a}|}{\partial x}$ und $\frac{\partial|\mathfrak{a}|}{\partial y}$.

Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein:

$$a_1 + i\,a_2 = \mathfrak{a} \qquad a_1 - i\,a_2 = \bar{\mathfrak{a}}\,, \tag{3}$$

wo i die imaginäre Einheit ist. Entsprechend ist die Bedeutung von $\mathfrak{b}$ und $\bar{\mathfrak{b}}$. Für den Betrag des Vektors $\mathfrak{a}$ gilt dann

$$|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{a}| = \sqrt{\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}}}\,. \tag{4}$$

Wie man leicht nachrechnen kann, gelten die Formeln

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} + i(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})_N = \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} - i(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})_N = \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,. \tag{5}$$

An Stelle von x, y wollen wir durch folgende Transformation die unabhängigen Größen $\mathfrak{z}$ und $\bar{\mathfrak{z}}$ einführen:

$$x + iy = \mathfrak{z}\,, \qquad x - iy = \bar{\mathfrak{z}}\,. \tag{6}$$

Es ist dann

$$x = \frac{\mathfrak{z}+\bar{\mathfrak{z}}}{2}\,, \qquad y = \frac{\mathfrak{z}-\bar{\mathfrak{z}}}{2i}\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mathfrak{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial\bar{\mathfrak{z}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{8}$$

Für div $\mathfrak{a}$ und rot $\mathfrak{a}$ gelten folgende Beziehungen:

$$\operatorname{div}\mathfrak{a} + i\,(\operatorname{rot}\mathfrak{a})_N = 2\,\frac{\partial\mathfrak{a}}{\partial\mathfrak{z}}\,, \qquad \operatorname{div}\mathfrak{a} - i\,(\operatorname{rot}\mathfrak{a})_N = 2\,\frac{\partial\bar{\mathfrak{a}}}{\partial\bar{\mathfrak{z}}}\,. \tag{9}$$

Die dem $\operatorname{grad}|\mathfrak{a}|$ entsprechende komplexe Größe läßt sich so darstellen

$$\frac{\partial|\mathfrak{a}|}{\partial x} + i\,\frac{\partial|\mathfrak{a}|}{\partial y} = 2\,\frac{\partial|\mathfrak{a}|}{\partial\bar{\mathfrak{z}}} = 2\,\frac{\partial\sqrt{\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}}}}{\partial\bar{\mathfrak{z}}} = \frac{1}{|\mathfrak{a}|}\,\frac{\partial(\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}})}{\partial\bar{\mathfrak{z}}}\,. \tag{10}$$

Aus (5) und (10) lassen sich nun folgende Formeln ableiten:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{a}\cdot\operatorname{grad}|\mathfrak{b}| + i\,(\mathfrak{a}\times\operatorname{grad}|\mathfrak{b}|)_N &= \bar{\mathfrak{a}}\cdot 2\,\frac{\partial|\mathfrak{b}|}{\partial\bar{\mathfrak{z}}} = \frac{\bar{\mathfrak{a}}}{|\mathfrak{b}|}\,\frac{\partial(\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{b}})}{\partial\bar{\mathfrak{z}}}\,,\\ \mathfrak{a}\cdot\operatorname{grad}|\mathfrak{b}| - i(\mathfrak{a}\times\operatorname{grad}|\mathfrak{b}|)_N &= \mathfrak{a}\cdot 2\,\frac{\partial|\mathfrak{b}|}{\partial\mathfrak{z}} = \frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{b}|}\,\frac{\partial(\mathfrak{b}\,\bar{\mathfrak{b}})}{\partial\mathfrak{z}}\,.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Setzen wir in der ersten dieser Formeln

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{V}\,, \tag{12}$$

wo $\mathfrak{V}$ der Vektor der Strömungsgeschwindigkeit des imkompressiblen Gutes mit den Komponenten u und v in x- und y-Richtung ist, und beachten, daß die komplexe Größe

$$\mathsf{V} = u + iv \tag{13}$$

nur von $\bar{\mathfrak{z}}$, nicht aber von $\mathfrak{z}$ abhängt, so finden wir

$$\mathfrak{V}\cdot\operatorname{grad}|\mathfrak{V}| + i(\mathfrak{V}\times\operatorname{grad}|\mathfrak{V}|)_N = \frac{\bar{\mathsf{V}}}{|\mathsf{V}|}\,\frac{\partial(\mathsf{V}\,\bar{\mathsf{V}})}{\partial\bar{\mathfrak{z}}} = \frac{\bar{\mathsf{V}}^2}{|\mathsf{V}|}\,\frac{d\,\mathsf{V}}{d\,\bar{\mathfrak{z}}}\,. \tag{14}$$

Die hierzu konjugierte Gleichung lautet

$$\mathfrak{V}\cdot\operatorname{grad}|\mathfrak{V}| - i(\mathfrak{V}\times\operatorname{grad}|\mathfrak{V}|)_N = \frac{\mathsf{V}^2}{|\mathsf{V}|}\,\frac{d\,\bar{\mathsf{V}}}{d\,\mathfrak{z}}\,. \tag{15}$$

[1] Vgl. *A. Busemann*, Z. angew. Math. Mech. 11 (1931), S. 71.

(Eingegangen am 6. Dezember 1948.)

Anschrift der Verfasser: Professor Dr. *Albert Betz*, (20 b) Göttingen, Herzberger Landstraße 39 a.
Dr. *Edgar Krahn*, z. Z. 224 Uxbridge Road, Hampton Hill Middx., England.

Allgemeine Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper.

Herrn R. Grammel zum 60. Geburtstag am 3. März 1949 gewidmet.

Von **E. Mettler.**

1. Einleitung. In einer vor kurzem in dieser Zeitschrift veröffentlichten Arbeit[1] (im folgenden bezeichnet als „erste Mitteilung") habe ich mit der Grundlegung einer allgemeinen Theorie der Stabilität der elastischen Bewegung begonnen. Diese vorausgegangene erste Mitteilung hatte den Sinn einer Problemstellung. Sie warf die Frage auf, ob die durch zeitlich veränderliche Kräfte erzwungene Bewegung eines elastischen Körpers stabil ist oder nicht. Die vorliegende zweite Mitteilung zu unserem Thema beschäftigt sich mit der praktischen Beantwortung der gestellten Frage, und zwar fast in derselben Allgemeinheit, in der das Problem damals mathematisch formuliert wurde. Ich mache im folgenden keinerlei weitere Einschränkungen hinsichtlich der Art des Kraftangriffs oder hinsichtlich der Form des elastischen Körpers, sondern setze lediglich von jetzt ab voraus, daß der zeitliche Verlauf der äußeren Belastung der einer harmonischen Schwingung ist. Da man für den praktischen Ausbau einer Integrationstheorie der Stabilitätsgleichungen bestimmte Annahmen über die Zeitabhängigkeit der Lasten machen muß, so erscheint es besonders zweckmäßig, zuerst die genannte, der traditionellen Elastokinetik entnommene Voraussetzung einzuführen, mit anderen Worten die Stabilität der erzwungenen harmonischen Schwingungen elastischer Körper zu untersuchen.

Mehr noch als die erste Mitteilung muß die folgende als ein Versuch bezeichnet werden. Die vorgeführte Theorie arbeitet nämlich zum Teil mit Hilfsmitteln und Ableitungen, deren mathematische Zuverlässigkeit nicht von vornherein feststeht. Es ist notwendig, dies hier deutlich auszusprechen und den Sinn, der den nachstehenden Ausführungen beigelegt werden soll, klar anzugeben.

Der grundlegende erste Schritt der folgenden Theorie, nämlich der Übergang von der das Stabilitätsproblem formulierenden Variationsgleichung zu dem Differentialgleichungssystem, an dem die praktische Rechnung ansetzt (I. Abschnitt), benutzt eine „direkte Methode" der Variationsrechnung. Es ist eine Näherungsmethode, deren Konvergenz und Brauchbarkeit vorerst lediglich aus ihrer Verwandtschaft mit dem altbewährten *Ritz*schen Verfahren geschlossen, aber nicht streng bewiesen wird. Ferner werden im Verlauf der zahlenmäßigen Festlegung der Instabilitätsbereiche (III. Abschnitt) unendliche Reihen aufgestellt, über deren Konvergenz nichts bekannt ist, ja bei denen man sogar mit Semikonvergenz rechnen muß. Zwar kennt man auch hierzu verwandte Entwicklungen — nämlich aus der Störungstheorie der Himmelsmechanik —, deren numerische Brauchbarkeit erfahrungsgemäß eine ausgezeichnete ist. Aber in dem vorliegenden Anwendungsfall müssen solche Erfahrungen doch erst bestätigt werden.

Der strenge Mathematiker hat also Grund zu kritischer Einstellung. Ihm sei gesagt, daß die folgenden Ausführungen keineswegs im Sinne eines mathematischen Existenzbeweises verstanden werden wollen, sondern den Zweck haben, dem praktischen Rechner in allgemeiner Form einen Näherungsweg zu zeigen, auf dem er in jedem Einzelfall zu einer mehr oder weniger genauen zahlenmäßigen Lösung des Stabilitätsproblems gelangen kann. Im gleichen Sinne ist etwa eine allgemeine Formulierung des *Ritz*schen Verfahrens zur Lösung von statischen Stabilitätsproblemen nicht als Existenzbeweis für die Verzweigungspunkte des elastischen Gleichgewichts aufzufassen, sondern als Aufstellung einer allgemeinen Rechenanweisung. Im Einzelfall erst kann aber die numerische Brauchbarkeit des Verfahrens und die erzielbare Genauigkeit der Näherung nachgeprüft werden, und dies in möglichst vielen verschiedenen Fällen tatsächlich durchzuführen, ist eine notwendige Ergänzung, durch welche die vorliegende Theorie ihre eigentliche Abrundung erfahren muß. Allerdings würde jede einigermaßen gründliche numerische Durchforschung der aufgestellten Lösungen den Rahmen dieser Arbeit ungebührlich erweitern, weshalb ich mich hier auf die allgemeine Theorie und ein einziges, eng begrenztes Zahlenbeispiel beschränke.

[1] *E. Mettler*, Ing.-Arch. 16 (1947), S. 135.

I. Abschnitt. Der Lösungsansatz.

2. Ausgangsgleichungen und Einführung eines Näherungsansatzes. Soweit wir im folgenden Ergebnisse aus der ersten Mitteilung übernehmen, verwenden wir dieselben Bezeichnungen wie dort. Das in Rede stehende Stabilitätsproblem wird formuliert durch die Variationsgleichung

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0\,. \tag{1}$$

Darin ist nach Gleichung (12), (13), (19), (20) und (22) der ersten Mitteilung

$$\left.\begin{aligned} L &= T^{(2)} - A_{\text{klass}} - A_{\text{zus}}\,,\\ A_{\text{klass}} &= \frac{G}{4}\iiint \sum_{i,j=1}^{3}\left[\left(\frac{\partial\,\bar{u}_i}{\partial\,x_j}+\frac{\partial\,\bar{u}_j}{\partial\,x_i}\right)^2+\frac{4\,\nu}{1-2\,\nu}\,\frac{\partial\,\bar{u}_i}{\partial\,x_i}\,\frac{\partial\,\bar{u}_j}{\partial\,x_j}\right]dx_1\,dx_2\,dx_3\,,\\ A_{\text{zus}} &= \frac{1}{2}\iiint \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}^{(0)} \sum_{r=1}^{3}\frac{\partial\,\bar{u}_r}{\partial\,x_i}\,\frac{\partial\,\bar{u}_r}{\partial\,x_j}\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,,\\ T^{(2)} &= \frac{1}{2}\iiint \varrho \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\,\bar{u}_i}{\partial\,t}\right)^2 dx_1\,dx_2\,dx_3\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die $k_{ij}^{(0)}$, die Spannungen des Grundbewegungszustandes, sind als gegeben anzusehen. Gesucht sind die Zusatzverschiebungen $\bar{u}_i$, welche die Nachbarbewegungen zur Grundbewegung $u_i^{(0)}$ darstellen und über die Stabilität des Grundzustandes Auskunft geben sollen. Sie unterliegen gewissen geometrischen Randbedingungen, die durch die den Gesamtverschiebungen

$$u_i = u_i^{(0)} + \bar{u}_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

vorgeschriebenen Randbedingungen unmittelbar gegeben sind.

Über die äußeren Lasten X_i und p_i machen wir in dieser Arbeit im Gegensatz zur ersten Mitteilung eine bestimmte Annahme. Die Lasten sollen als Summen eines zeitlich konstanten und eines zeitlich harmonisch veränderlichen Anteils gegeben sein:

$$\left.\begin{aligned} X_i &= \lambda X_i' + \varepsilon X_i'' \cos\omega t\\ p_i &= \lambda p_i' + \varepsilon p_i'' \cos\omega t \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, 3)\,. \tag{3}$$

Die X_i', X_i'', p_i' und p_i'' seien gegebene Ortsfunktionen. Durch Multiplikation mit den freibleibenden Parametern λ bzw. ε erhält man daraus die in (3) stehenden statischen bzw. veränderlichen Lastanteile in jeder gewünschten Größe.

Aus den Lasten (3) muß der zugehörige Grundbewegungszustand berechnet werden, und zwar muß dies, da wir uns wie in der ersten Mitteilung auf „linearisierte Grundzustände" beschränken wollen, auf dem Boden der klassischen Elastizitätstheorie geschehen. Da in dieser Theorie das Superpositionsgesetz gilt und mehrdeutige Lösungen nicht vorkommen, so erhält man die Spannungen des Grundbewegungszustandes eindeutig in der Gestalt

$$k_{ij}^{(0)} = \lambda\,\sigma_{ij}' + \varepsilon\,\sigma_{ij}'' \cos\omega t \qquad (i, j = 1, 2, 3)\,. \tag{4}$$

Die statischen Spannungen $\lambda\sigma_{ij}'$ sind darin ausschließlich durch die statischen Lastanteile bestimmt, die pulsierenden Spannungen $\varepsilon\,\sigma_{ij}''\cos\omega t$ sind die Spannungen der von den pulsierenden Lastanteilen erzwungenen Schwingung, die von allen Eigenschwingungen befreit sein soll.

Die σ_{ij}'und σ_{ij}'' sind somit als gegebene Ortsfunktionen zu betrachten. Die σ_{ij}'' hängen außerdem von der erregenden Frequenz ω ab. Für gewisse Werte von ω werden die σ_{ij}'' unendlich groß. Das tritt dann ein, wenn bei Zusammentreffen von ω mit einer Eigenfrequenz des Körpers Resonanz für die Grundbewegung entsteht. Solche Werte von ω schließen sich von selbst dadurch aus, daß für sie die folgenden Rechnungen, in denen bestimmte endliche Beträge der σ_{ij}'' vorausgesetzt werden, gar nicht durchführbar sind. Wichtig ist, daß durch diesen Umstand im allgemeinen keineswegs sämtliche Eigenfrequenzwerte für ω verboten werden. Beispiele sind leicht anzuführen; eines wird am Schluß von Ziff. **3** genannt.

Der grundlegende erste Schritt unserer Berechnung der $\bar{u}_i$ besteht in der Einführung des allgemeinen Näherungsansatzes

$$\bar{u}_i = u_{i1}\,w_{i1} + u_{i2}\,w_{i2} + \cdots + u_{iN}\,w_{iN} \qquad (i = 1, 2, 3)\,. \tag{5}$$

Darin sollen die $w_{ij} = w_{ij}(t)$ unbekannte Funktionen der Zeit und die $u_{ij} = u_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ bestimmte fest gewählte Funktionen des Ortes, sogenannte „Koordinatenfunktionen" sein, welche die den $\bar{u}_i$ vorgeschriebenen geometrischen Randbedingungen erfüllen. Wie man sieht, stellt (5) eine einfache Erweiterung des von dem bekannten *Ritz*schen Verfahren her gewohnten Ansatzes[1] dar. Nach *Ritz* setzt man die Lösung eines Variationsproblems als Summe von bestimmten Funktionen an, deren jede mit einem freibleibenden konstanten Koeffizienten multipliziert ist. Wenn wir hier statt konstanter Koeffizienten unbekannte Zeitfunktionen stehen lassen, für die wir dann später ein System von – den *Ritz*schen linearen algebraischen Gleichungen entsprechenden – gewöhnlichen Differentialgleichungen ableiten, so schlagen wir damit einen Mittelweg ein zwischen dem *Ritz*schen Verfahren als konsequenter direkter Methode einerseits und der Ableitung der *Euler*schen partiellen Differentialgleichungen als klassischer Methode der Variationsrechnung andererseits[2]. Von größter Wichtigkeit für die Güte der mit dem Ansatz (5) erzielbaren Ergebnisse ist zweifellos auch hier wie bei allen direkten Verfahren der Variationsrechnung die geschickte, dem jeweils vorliegenden Problem angepaßte Wahl der Koordinatenfunktionen.

Um die folgenden Formeln übersichtlicher zu gestalten, wollen wir den im Anschluß an das *Ritz*sche Verfahren gebildeten Ansatz (5) in eine äußerlich etwas andere Form umschreiben. Wir setzen an Stelle von (5) mit anderer Bezifferung der u_{ij}

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_1 &= u_{11}\, w_1 + u_{14}\, w_4 + \cdots + u_{1,\,N-2}\, w_{N-2} \\ \bar{u}_2 &= u_{22}\, w_2 + u_{25}\, w_5 + \cdots + u_{2,\,N-1}\, w_{N-1} \\ \bar{u}_3 &= u_{33}\, w_3 + u_{36}\, w_6 + \cdots + u_{3N}\, w_N \end{aligned}\right| \qquad (6)$$

worin nun die $w_j(t)$ die unbekannten Zeitfunktionen darstellen. Es ist klar, daß durch die Ersetzung von (5) durch (6) die Allgemeinheit des Ansatzes nicht eingeschränkt wird.

Geht man mit (6) in (2) hinein, so kann man die räumlichen Integrationen ausführen und erhält, wenn man eine zeitliche Ableitung durch einen Punkt bezeichnet,

$$\dot{L} = \sum_{f,m=1}^{N} A_{fm}\, \dot{w}_f\, \dot{w}_m - \sum_{f,m=1}^{N} D_{fm}\, w_f\, w_m - \varepsilon \cos \omega t \sum_{f,m=1}^{N} E_{fm}\, w_f\, w_m\,, \qquad (7)$$

worin D_{fm} die Form

$$D_{fm} = B_{fm} + \lambda\, C_{fm}$$

hat. Die Koeffizienten A_{fm} bis E_{fm} lassen sich auf Grund des Ansatzes (6) in der Form schreiben:

$$A_{fm} = \frac{1}{2} \iiint \varrho \sum_{i=1}^{3} u_{if}\, u_{im}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\,,$$

$$B_{fm} = \frac{G}{4} \iiint \sum_{i,j=1}^{3} \left[\left(\frac{\partial u_{if}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jf}}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_{im}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jm}}{\partial x_i} \right) + \frac{4\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_{if}}{\partial x_i} \frac{\partial u_{jm}}{\partial x_j} \right] dx_1\, dx_2\, dx_3\,,$$

$$C_{fm} = \frac{1}{2} \iiint \sum_{i,j=1}^{3} \sigma'_{ij} \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial u_{rf}}{\partial x_i} \frac{\partial u_{rm}}{\partial x_j}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\,,$$

$$E_{fm} = \frac{1}{2} \iiint \sum_{i,j=1}^{3} \sigma''_{ij} \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial u_{rf}}{\partial x_i} \frac{\partial u_{rm}}{\partial x_j}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\,.$$

In diesen Ausdrücken ist für diejenigen Funktionen u_{ik}, die in (6) nicht vorkommen, Null einzusetzen. Es gilt offenbar

$$A_{fm} = A_{mf}, \quad B_{fm} = B_{mf}, \quad C_{fm} = C_{mf}, \quad D_{fm} = D_{mf}, \quad E_{fm} = E_{fm}\,.$$

Die Koeffizienten A_{fm}, B_{fm} und C_{fm} sind auf Grund unserer Festlegung der Koordinatenfunktionen konstante Zahlen, die E_{fm} Funktionen von ω.

---

[1] Vgl. z. B. *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik. Berlin 1939, S. 136.

[2] Unser Verfahren ist grundsätzlich bekannt: *H. Poritsky*, Verh. d. 5. Int. Kongr. f. Techn. Mech. Cambridge (Mass.) 1938, S. 700.

3. Transformation des Problems in die Normalform. Die Form (7) von L eignet sich nicht gut zur Ermittlung der unbekannten Funktionen w_j. Wir müssen L erst auf eine einfachere Normalform bringen. Wir suchen dazu eine lineare reelle Transformation

$$w_i = a_{i1}\, v_1 + a_{i2}\, v_2 + \cdots + a_{iN}\, v_N \quad (i = 1, 2, \ldots N) \tag{8}$$

auf, welche die beiden quadratischen Formen

$$A = \sum_{f,m=1}^{N} A_{fm}\, w_f\, w_m \quad \text{und} \quad D = \sum_{f,m=1}^{N} D_{fm}\, w_f\, w_m$$

gleichzeitig auf die Gestalt

$$A = \sum_{f=1}^{N} v_f^2 \quad \text{und} \quad D = \sum_{f=1}^{N} \omega_f^2\, v_f^2$$

bringt[1]. Eine solche Transformation (8) existiert, weil die quadratische Form A vermöge ihrer mechanischen Bedeutung als kinetische Energie positiv definit ist. Die ω_j^2 genügen der Determinantengleichung

$$|D_{fm} - \omega_j^2\, A_{fm}| = 0\,. \tag{9}$$

Wie man die Koeffizienten von (8) praktisch auffindet, soll hier als bekannt vorausgesetzt werden.

Durch die Transformation (8) geht die Funktion (7) in die Normalform

$$L = \sum_{f=1}^{N} \dot{v}_f^2 - \sum_{f=1}^{N} \omega_f^2 v_f^2 - \varepsilon \cos \omega t \sum_{f,m=1}^{N} F_{fm}\, v_f\, v_m \tag{10}$$

mit

$$F_{fm} = \sum_{i,j=1}^{N} E_{ij}\, a_{if}\, a_{jm}, \quad F_{fm} = F_{mf}$$

über. Darin hängen die ω_f^2 von λ und die F_{fm} von λ und ω ab. Aus (10) folgen die *Euler-Lagrange*schen Gleichungen $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}_f}\right) - \frac{\partial L}{\partial v_f} = 0$ des Variationsproblems zu

$$\ddot{v}_f + \omega_f^2\, v_f + \varepsilon \cos \omega t \sum_{m=1}^{N} F_{fm}\, v_m = 0 \quad (f = 1, 2, \ldots N)\,, \tag{11}$$

deren Integrationstheorie uns in den nächsten Abschnitten beschäftigen wird.

Zuvor ist es nützlich, sich die mechanische Bedeutung der Transformation (8) klarzumachen. Setzen wir in (10) $\varepsilon = 0$, so steht statt (11) einfach

$$\ddot{v}_f + \omega_f^2\, v_f = 0 \quad (f = 1, 2, \ldots N)\,.$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichungen sind (für $\omega_f^2 > 0$) harmonische Schwingungen

$$v_f = \begin{cases} \sin \omega_f t \\ \cos \omega_f t \end{cases} \quad (f = 1, 2, \ldots N)\,.$$

Es handelt sich offenbar um die Eigenschwingungen des zeitlich konstant vorbelasteten Körpers, mit anderen Worten um die Nachbarbewegungen zur statischen Grundgleichgewichtslage. Die Größen ω_f sind die Eigenfrequenzen. Die geometrischen Eigenschwingungsformen findet man sofort durch Einsetzen von (8) in (6). Es entsteht

$$\bar{u}_i = v_1 \sum_{r=1}^{N} u_{ir}\, a_{r1} + v_2 \sum_{r=1}^{N} u_{ir}\, a_{r2} + \cdots + v_N \sum_{r=1}^{N} u_{ir}\, a_{rN} \quad (i = 1, 2, 3)\,.$$

Die k-te Eigenschwingung hat also die Schwingungsform

$$u_{ik}^{\bullet} = \sum_{r=1}^{N} u_{ir}\, a_{rk} \quad (i = 1, 2, 3)\,.$$

---

[1] Vgl. zu dieser „Transformation auf Haupt- oder Normalkoordinaten" *E. T. Whittaker*, Analytische Dynamik, Berlin 1924, § 77—78, oder *J. Horn*, Gewöhnliche Differentialgleichungen, 3. Aufl., Berlin und Leipzig 1937, § 28.

Wir haben somit (jetzt wieder für das allgemeine Problem $\varepsilon \neq 0$) vermöge (8) den Lösungsansatz (6) in

$$\bar{u}_i = u_{i1}^* \, v_1 + u_{i2}^* \, v_2 + \cdots + u_{iN}^* \, v_N \quad (i = 1, 2, 3) \tag{12}$$

übergeführt, d. h. wir setzen jetzt für die Zusatzverschiebungen $\bar{u}_i$ eine Summe aus Produkten der Eigenschwingungsformen u_{ik}^* des statisch vorbelasteten Körpers mit unbekannten Zeitfunktionen v_k. Durch diesen besonderen Ansatz wird die Funktion L auf die Normalform (10) gebracht.

Die Eigenfrequenzen ω_j stehen in einem wichtigen Zusammenhang mit den statischen Knicklasten des elastischen Körpers. Setzen wir in der Gleichung (9), die ja identisch ist mit

$$|B_{fm} + \lambda \, C_{fm} - \omega_j^2 \, A_{fm}| = 0 \,, \tag{13}$$

zunächst $\lambda = 0$, so sind die N Wurzeln ω_j^2 als Frequenzquadrate des unbelasteten Körpers alle positiv, die ω_j also alle reell und $\neq 0$. Daran ändert sich aus Stetigkeitsgründen auch nichts, wenn λ kleine Beträge annimmt. Die statische Gleichgewichtslage ist also für genügend kleine Belastungen stabil. Wächst $|\lambda|$ weiter an, bis λ schließlich die erste (positive oder negative) Wurzel λ_1 der Gleichung

$$|B_{fm} + \lambda \, C_{fm}| = 0 \tag{14}$$

erreicht, so wird mindestens eine Wurzel ω_j^2 von (13) Null, wie man durch Vergleich von (13) und (14) sofort sieht. Die für $\lambda = \lambda_1$ nicht verschwindenden Wurzeln sind positiv geblieben. Offenbar ist nun auf den Körper gerade die erste statische Knicklast aufgebracht. Um dies einzusehen, braucht man nur mit dem *Ritz*ansatz (6), jetzt mit konstanten Koeffizienten w_k, in die statische Gleichung $\delta(A_{\text{klass}} + A_{\text{zus}}) = 0$ (mit $\varepsilon = 0$) hineinzugehen; man kommt dann sofort auf die Gleichung (14) für die Knicklasten.

Was weiter geschieht, wenn λ die Wurzel λ_1 überschreitet, soll hier nicht verfolgt werden. Vielmehr lassen wir für λ weiterhin nur solche Werte zu, für die der Körper im stabilen Gleichgewicht ist; denn es erscheint überflüssig, sich mit der Stabilität der erzwungenen Schwingungen eines elastischen Körpers zu befassen, der schon statisch über die Stabilitätsgrenze hinaus belastet ist. Wir halten lediglich als Ergebnis der Überlegung fest, daß mindestens eine der sämtlich reellen Eigenfrequenzen ω_j auf Null absinkt, wenn sich die statische Last von Null her einer Knicklast nähert.

Die Größe der statischen Last wird übrigens unter Umständen nicht nur durch das Erreichen der statischen Stabilitätsgrenze beschränkt, sondern auch durch die Bedingung des „linearisierten Grundzustandes", nämlich der Forderung, daß sich die Beiträge des statischen und des schwingenden Lastanteils zum Grundspannungszustand ohne gegenseitige Beeinflussung einfach überlagern müssen. Was das heißt, macht man sich am besten an einem Beispiel klar:

An dem in Abschnitt **5** der ersten Mitteilung behandelten Stab stören sich offenbar der statische und der schwingende Grundbiegungszustand in y-Richtung gegenseitig so lange nicht, als es sich um eine reine Querbelastung des Stabes in y-Richtung handelt. Die statische Last darf bis zur Kippgrenze ansteigen, ohne daß sie die erzwungene Schwingung beeinflußt; insbesondere verschieben sich dabei die Biegeeigenfrequenzen des Stabes in y-Richtung, die allein als Resonanzfrequenzen der erzwungenen Schwingung in Frage kommen, nicht. Davon unabhängig ändern sich die Biegeeigenfrequenzen in z-Richtung und die Torsionseigenfrequenzen mit λ in der dargelegten Weise. Anders ist es, wenn der Stab auch noch durch eine statische Längskraft (in x-Richtung) beansprucht wird. Dann sinken nämlich auch die Biegeeigenfrequenzen in y-Richtung in bekannter Weise ab, wenn sich die Längskraft der Knicklast nähert, und damit werden die Resonanzfrequenzen der erzwungenen Schwingung verschoben. Die klassische Theorie gibt diesen Effekt allerdings nicht wieder. Damit sie aber für die Berechnung der erzwungenen Schwingung genau genug bleibt, muß die statische Längskraft auf Werte weit unterhalb der Knicklast begrenzt werden.

4. Ein Beispiel. Zur Veranschaulichung der bisherigen allgemeinen Ausführungen sei hier ein konkretes Beispiel behandelt, das schon in Ziff. **5** der ersten Mitteilung betrachtet wurde: der flache Rechteckstreifen in Gabellagerung mit Belastung durch Endmomente

$$M_E = \lambda \, M_0 + \varepsilon \, M_1 \cos \omega t$$

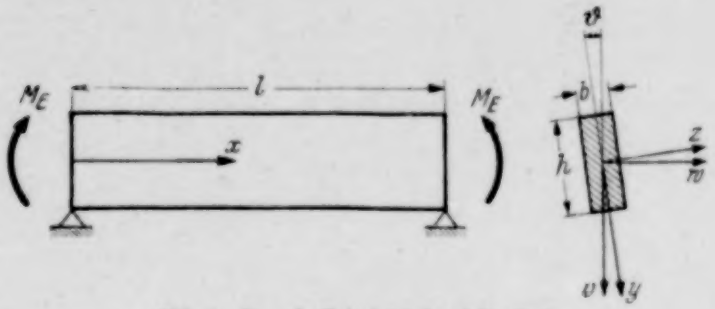

Abb. 1. Der als Beispiel behandelte Stab.

(Abb. 1, Bezeichnungen wie in der ersten Mitteilung[1]). Wie früher abgeleitet, kann man die Verschiebung v der Stabachse in vertikaler Richtung als unwesentlich außer Betracht lassen (vgl. dazu die Bemerkung am Schluß dieser Ziff.) und hat somit nur die Querverschiebung w der Stabachse in waagerechter Richtung sowie den Verdrehwinkel ϑ des Querschnitts in den Stabilitätsgleichungen zu berücksichtigen. Wir haben also nach den Gleichungen (30), (31) und (32) der ersten Mitteilung

$$A_{\text{klass}} = \frac{E J_y}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{G J_d}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)^2 dx , \tag{15}$$

$$A_{zus} = \int_0^l \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (M \vartheta)\, dx , \tag{16}$$

$$T^{(2)} = \frac{\mu}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + i_P^2 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)^2\right] dx . \tag{17}$$

Die Grundbewegung des Stabes ist die von den äußeren Momenten M_E erzwungene Biegeschwingung in lotrechter (r-) Richtung. Sie hat nach den allgemeinen Aussagen der Stabkinetik[2] das Biegemoment

$$M = \lambda M_0 + \frac{4 \varepsilon M_1}{\pi} \cos \omega t \sum_{k=1}^{\infty\prime} \frac{\sin \frac{k \pi x}{l}}{k \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{ky}}\right)^2\right]} , \tag{18}$$

wobei der Strich am Summenzeichen besagt, daß nur ungerade k auftreten, und

$$\omega_{ky} = \left(\frac{k \pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{E J_z}{\mu}}$$

die Biegeeigenfrequenzen des Stabes in y-Richtung bedeuten. Gleichung (18) entspricht der allgemeinen Gleichung (4).

Wenn wir nun den Näherungsansatz (6) aufstellen, so ist zu beachten, daß die vorliegenden Ausdrücke (15), (16), (17) nicht mehr wie (2) aus den drei allgemeinen, von drei Koordinaten abhängigen Zusatzverschiebungen gebildet, sondern soweit vereinfacht sind, daß sie nur noch die zwei von x allein abhängenden Funktioen w und ϑ enthalten. Das Problem ist also im speziellen Fall unseres Beispiels zweidimensional. Wir setzen deshalb an die Stelle des allgemeinen dreifachen Ansatzes (6) einen entsprechenden zweifachen für w und ϑ, in dem die Koordinatenfunktionen Funktionen von x sind, welche die Randbedingungen für $x=0$ und $x=l$ (Gabellagerung) erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} w &= w_1 \sin \frac{\pi x}{l} + w_3 \sin \frac{2 \pi x}{l} + \cdots + w_{2N-1} \sin \frac{N \pi x}{l} , \\ \vartheta &= w_2 \sin \frac{\pi x}{l} + w_4 \sin \frac{2 \pi x}{l} + \cdots + w_{2N} \sin \frac{N \pi x}{l} . \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Dies liefert in (15) eingesetzt

$$A_{\text{klass}} = \frac{E J_y}{2} \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \sum_{k=1}^{N} k^4 w_{2k-1}^2 \int_0^l \sin^2 \frac{k \pi x}{l}\, dx + \frac{G J_d}{2} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} k^2 w_{2k}^2 \int_0^l \cos^2 \frac{k \pi x}{l}\, dx$$

oder

$$A_{\text{klass}} = \frac{E J_y}{2} \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{N} k^4 w_{2k-1}^2 + \frac{G J_d}{2} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{N} k^2 w_{2k}^2 . \tag{20}$$

---

[1] Wir schreiben jetzt allerdings M_E statt des dort verwendeten Buchstabens M, der für das Biegemoment (18) vorbehalten bleiben muß. Die Faktoren λ und ε sind in den Ausdruck für das Endmoment M_E eingefügt, um ihn in Einklang mit (3) zu bringen.

[2] Vgl. etwa *K. Hohenemser* und *W. Prager*, Dynamik der Stabwerke, Kap. IIB. Berlin 1933.

Wir haben somit (jetzt wieder für das allgemeine Problem $\varepsilon \neq 0$) vermöge (8) den Lösungsansatz (6) in

$$\bar{u}_i = u_{i1}^* v_1 + u_{i2}^* v_2 + \cdots + u_{iN}^* v_N \quad (i = 1, 2, 3) \tag{12}$$

übergeführt, d. h. wir setzen jetzt für die Zusatzverschiebungen $\bar{u}_i$ eine Summe aus Produkten der Eigenschwingungsformen u_{ik}^* des statisch vorbelasteten Körpers mit unbekannten Zeitfunktionen v_k. Durch diesen besonderen Ansatz wird die Funktion L auf die Normalform (10) gebracht.

Die Eigenfrequenzen ω_j stehen in einem wichtigen Zusammenhang mit den statischen Knicklasten des elastischen Körpers. Setzen wir in der Gleichung (9), die ja identisch ist mit

$$|B_{fm} + \lambda C_{fm} - \omega_j^2 A_{fm}| = 0\,, \tag{13}$$

zunächst $\lambda = 0$, so sind die N Wurzeln ω_j^2 als Frequenzquadrate des unbelasteten Körpers alle positiv, die ω_j also alle reell und $\neq 0$. Daran ändert sich aus Stetigkeitsgründen auch nichts, wenn λ kleine Beträge annimmt. Die statische Gleichgewichtslage ist also für genügend kleine Belastungen stabil. Wächst $|\lambda|$ weiter an, bis λ schließlich die erste (positive oder negative) Wurzel λ_1 der Gleichung

$$|B_{fm} + \lambda C_{fm}| = 0 \tag{14}$$

erreicht, so wird mindestens eine Wurzel ω_j^2 von (13) Null, wie man durch Vergleich von (13) und (14) sofort sieht. Die für $\lambda = \lambda_1$ nicht verschwindenden Wurzeln sind positiv geblieben. Offenbar ist nun auf den Körper gerade die erste statische Knicklast aufgebracht. Um dies einzusehen, braucht man nur mit dem *Ritz*ansatz (6), jetzt mit konstanten Koeffizienten w_k, in die statische Gleichung $\delta(A_{\text{klass}} + A_{\text{zus}}) = 0$ (mit $\varepsilon = 0$) hineinzugehen; man kommt dann sofort auf die Gleichung (14) für die Knicklasten.

Was weiter geschieht, wenn λ die Wurzel λ_1 überschreitet, soll hier nicht verfolgt werden. Vielmehr lassen wir für λ weiterhin nur solche Werte zu, für die der Körper im stabilen Gleichgewicht ist; denn es erscheint überflüssig, sich mit der Stabilität der erzwungenen Schwingungen eines elastischen Körpers zu befassen, der schon statisch über die Stabilitätsgrenze hinaus belastet ist. Wir halten lediglich als Ergebnis der Überlegung fest, daß mindestens eine der sämtlich reellen Eigenfrequenzen ω_j auf Null absinkt, wenn sich die statische Last von Null her einer Knicklast nähert.

Die Größe der statischen Last wird übrigens unter Umständen nicht nur durch das Erreichen der statischen Stabilitätsgrenze beschränkt, sondern auch durch die Bedingung des „linearisierten Grundzustandes", nämlich der Forderung, daß sich die Beiträge des statischen und des schwingenden Lastanteils zum Grundspannungszustand ohne gegenseitige Beeinflussung einfach überlagern müssen. Was das heißt, macht man sich am besten an einem Beispiel klar:

An dem in Abschnitt **5** der ersten Mitteilung behandelten Stab stören sich offenbar der statische und der schwingende Grundbiegungszustand in y-Richtung gegenseitig so lange nicht, als es sich um eine reine Querbelastung des Stabes in y-Richtung handelt. Die statische Last darf bis zur Kippgrenze ansteigen, ohne daß sie die erzwungene Schwingung beeinflußt; insbesondere verschieben sich dabei die Biegeeigenfrequenzen des Stabes in y-Richtung, die allein als Resonanzfrequenzen der erzwungenen Schwingung in Frage kommen, nicht. Davon unabhängig ändern sich die Biegeeigenfrequenzen in z-Richtung und die Torsionseigenfrequenzen mit λ in der dargelegten Weise. Anders ist es, wenn der Stab auch noch durch eine statische Längskraft (in x-Richtung) beansprucht wird. Dann sinken nämlich auch die Biegeeigenfrequenzen in y-Richtung in bekannter Weise ab, wenn sich die Längskraft der Knicklast nähert, und damit werden die Resonanzfrequenzen der erzwungenen Schwingung verschoben. Die klassische Theorie gibt diesen Effekt allerdings nicht wieder. Damit sie aber für die Berechnung der erzwungenen Schwingung genau genug bleibt, muß die statische Längskraft auf Werte weit unterhalb der Knicklast begrenzt werden.

4. Ein Beispiel. Zur Veranschaulichung der bisherigen allgemeinen Ausführungen sei hier ein konkretes Beispiel behandelt, das schon in Ziff. **5** der ersten Mitteilung betrachtet wurde: der flache Rechteckstreifen in Gabellagerung mit Belastung durch Endmomente

$$M_E = \lambda M_0 + \varepsilon M_1 \cos \omega t$$

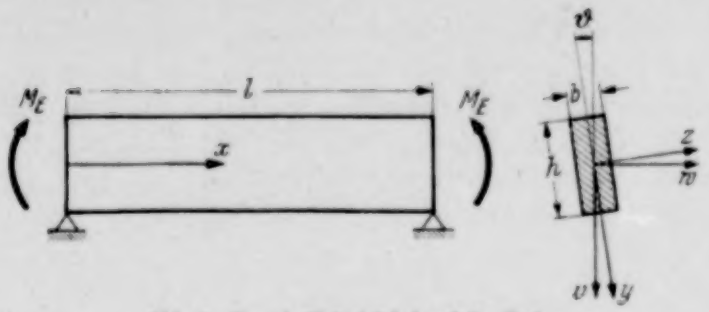

Abb. 1. Der als Beispiel behandelte Stab.

(Abb. 1, Bezeichnungen wie in der ersten Mitteilung[1]). Wie früher abgeleitet, kann man die Verschiebung v der Stabachse in vertikaler Richtung als unwesentlich außer Betracht lassen (vgl. dazu die Bemerkung am Schluß dieser Ziff.) und hat somit nur die Querverschiebung w der Stabachse in waagerechter Richtung sowie den Verdrehwinkel ϑ des Querschnitts in den Stabilitätsgleichungen zu berücksichtigen. Wir haben also nach den Gleichungen (30), (31) und (32) der ersten Mitteilung

$$A_{\text{klass}} = \frac{E J_y}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{G J_d}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 dx , \tag{15}$$

$$A_{\text{zus}} = \int_0^l \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (M \vartheta)\, dx , \tag{16}$$

$$T^{(2)} = \frac{\mu}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + i_P^2 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 \right] dx . \tag{17}$$

Die Grundbewegung des Stabes ist die von den äußeren Momenten M_E erzwungene Biegeschwingung in lotrechter (r-) Richtung. Sie hat nach den allgemeinen Aussagen der Stabkinetik[2] das Biegemoment

$$M = \lambda M_0 + \frac{4 \varepsilon M_1}{\pi} \cos \omega t \sum_{k=1}^{\infty\prime} \frac{\sin \frac{k \pi x}{l}}{k \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{ky}} \right)^2 \right]} , \tag{18}$$

wobei der Strich am Summenzeichen besagt, daß nur ungerade k auftreten, und

$$\omega_{ky} = \left(\frac{k \pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{E J_z}{\mu}}$$

die Biegeeigenfrequenzen des Stabes in y-Richtung bedeuten. Gleichung (18) entspricht der allgemeinen Gleichung (4).

Wenn wir nun den Näherungsansatz (6) aufstellen, so ist zu beachten, daß die vorliegenden Ausdrücke (15), (16), (17) nicht mehr wie (2) aus den drei allgemeinen, von drei Koordinaten abhängigen Zusatzverschiebungen gebildet, sondern soweit vereinfacht sind, daß sie nur noch die zwei von x allein abhängenden Funktioen w und ϑ enthalten. Das Problem ist also im speziellen Fall unseres Beispiels zweidimensional. Wir setzen deshalb an die Stelle des allgemeinen dreifachen Ansatzes (6) einen entsprechenden zweifachen für w und ϑ, in dem die Koordinatenfunktionen Funktionen von x sind, welche die Randbedingungen für $x=0$ und $x=l$ (Gabellagerung) erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} w &= w_1 \sin \frac{\pi x}{l} + w_3 \sin \frac{2 \pi x}{l} + \cdots + w_{2N-1} \sin \frac{N \pi x}{l} , \\ \vartheta &= w_2 \sin \frac{\pi x}{l} + w_4 \sin \frac{2 \pi x}{l} + \cdots + w_{2N} \sin \frac{N \pi x}{l} . \end{aligned}\right| \tag{19}$$

Dies liefert in (15) eingesetzt

$$A_{\text{klass}} = \frac{E J_y}{2} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \sum_{k=1}^{N} k^4 w_{2k-1}^2 \int_0^l \sin^2 \frac{k \pi x}{l}\, dx + \frac{G J_d}{2} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sum_{k=1}^{n} k^2 w_{2k}^2 \int_0^l \cos^2 \frac{k \pi x}{l}\, dx$$

oder

$$A_{\text{klass}} = \frac{E J_y}{2} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{N} k^4 w_{2k-1}^2 + \frac{G J_d}{2} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{N} k^2 w_{2k}^2 . \tag{20}$$

---

[1] Wir schreiben jetzt allerdings M_E statt des dort verwendeten Buchstabens M, der für das Biegemoment (18) vorbehalten bleiben muß. Die Faktoren λ und ε sind in den Ausdruck für das Endmoment M_E eingefügt, um ihn in Einklang mit (3) zu bringen.

[2] Vgl. etwa *K. Hohenemser* und *W. Prager*, Dynamik der Stabwerke, Kap. IIB. Berlin 1933.

Ebenso kommt aus (17)

$$T^{(2)} = \frac{\mu l}{4} \sum_{k=1}^{N} \dot{w}_{2k-1}^2 + \frac{\mu l}{4} i_p^2 \sum_{k=1}^{N} \dot{w}_{2k}^2 . \tag{21}$$

Die Arbeit (16) berechnet man am bequemsten, wenn man sie in der Form

$$A_{zus} = -\int_0^l M \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \, dx$$

schreibt. Man erhält dann sofort

$$A_{zus} = \lambda M_0 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{N} k^2 w_{2k-1} w_{2k} + \varepsilon \cos \omega t \sum_{i,k=1}^{N} E_{2i,2k-1} w_{2i} w_{2k-1} , \tag{22}$$

worin entsprechend der Schreibweise (7) abkürzend

$$E_{2i,2k-1} = M_1 \frac{4}{\pi} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 k^2 \int_0^l \left(\sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \sum_{j=1}^{\infty}{}' \frac{\sin \frac{j\pi x}{l}}{j\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{jy}}\right)^2\right]} \right) dx \tag{23}$$

gesetzt ist (während wir die leicht ersichtlichen übrigen Konstanten von (7), nämlich A_{fm}, B_{fm} und C_{fm} nicht besonders aufgeschrieben haben).

Beachten wir nun bei der Auswertung des Integrals in (23) die elementaren Formeln

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta) ,$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin (\alpha - \beta) ,$$

$$\int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \, dx = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } k , \\ \dfrac{2l}{k\pi} & \text{für ungerade } k , \end{cases}$$

so folgt sofort

$$E_{2i,2k-1} \begin{cases} \neq 0 , & \text{falls } i \text{ und } k \text{ beide gerade oder ungerade,} \\ = 0 , & \text{falls } i, k \text{ gemischt.} \end{cases}$$

In Worten ausgedrückt: die Gesamtheit der E_{fm} zerfällt in unserem Beispiel in zwei verschiedene Gruppen. Die eine Gruppe ist ausschließlich gebildet aus den „geraden" Koordinatenfunktionen $\sin k\pi x/l$ mit geradem k, die andere Gruppe aus den „ungeraden" Koordinatenfunktionen mit ungeradem k. Eine „Mischung" der verschiedenen Koordinatenfunktionen tritt nicht ein. Dieselbe Feststellung kann man auch für die übrigen Arbeitsausdrücke (20), (21) und den mit λ multiplizierten Teil von (22) (die Koeffizienten A_{fm}, B_{fm} und C_{fm}) treffen. Daraus folgt weiter, daß man auch bei der Bildung der Gleichungen $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{w}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial w_k} = 0$ auf zwei völlig getrennte Systeme von Differentialgleichungen kommen wird, von denen man jeweils das eine oder andere allein erhält, wenn man den Ansatz (19) ausschließlich mit „geraden" oder „ungeraden" Koordinatenfunktionen einführt.

Wir wollen in Fortführung des Beispiels nur noch die Gleichungen betrachten, die aus den ungeraden Koordinatenfunktionen entstehen, da die übrigen dann nichts Neues mehr bringen. Wir schreiben daher, um die wesentlichen Formeln kurz zu wiederholen, mit anderer Bezifferung der w_j statt (19)

$$\left.\begin{aligned} w &= w_1 \sin \frac{\pi x}{l} + w_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \cdots + w_{n-1} \sin \frac{(n-1)\pi x}{l} , \\ \vartheta &= w_2 \sin \frac{\pi x}{l} + w_4 \sin \frac{3\pi x}{l} + \cdots + w_n \sin \frac{(n-1)\pi x}{l} . \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Daraus folgt, wenn wir den mit λ multiplizierten Teil von A_{zus} mit $\lambda \bar{A}_{zus}$ abkürzen, nach (20), (21) und (22)

$$A_{klass} + \lambda \bar{A}_{zus} = \frac{\pi^2}{4l} \sum_{k=1}^{n-1}{}' k^2 \left[EJ_y \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 w_k^2 + 2\lambda M_0 w_k w_{k+1} + GJ_d w_{k+1}^2 \right] , \tag{25}$$

$$T^{(2)} = \frac{\mu l}{4} \sum_{k=1}^{n-1}{}' \dot{w}_k^2 + \frac{\mu l}{4} i_p^2 \sum_{k=1}^{n-1}{}' \dot{w}_{k+1}^2 . \tag{26}$$

Auf den mit $\varepsilon \cos \omega t$ multiplizierten Teil von A_{zus} kommen wir sogleich zurück und erledigen zunächst die Aufgabe der Einführung von Normalkoordinaten nach Ziff. 3.

Der Ausdruck (25) besteht aus einer Summe von $n/2$ quadratischen Formen mit je zwei Variabeln w_k, w_{k+1}. Die Hauptachsentransformation dieser einzelnen Summanden läßt sich leicht ausführen. Man erhält, wie aus der analytischen Geometrie bekannt oder durch Rückwärtseinsetzen leicht zu bestätigen ist, die den Gleichungen (8) entsprechenden Transformationsformeln

$$\left.\begin{aligned} w_k &= \frac{2}{\sqrt{\mu l}} (v_k \cos \alpha_k - v_{k+1} \sin \alpha_k), \\ w_{k+1} &= \frac{2}{i_p \sqrt{\mu l}} (v_k \sin \alpha_k + v_{k+1} \cos \alpha_k) \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 3, \ldots n-1), \tag{27}$$

mit

$$\operatorname{tg} 2\alpha_k = \frac{2 \lambda M_0 i_p}{E J_y \left(\frac{k\pi i_p}{l}\right)^2 - G J_d}$$

während (9) in die Gleichungen

$$\begin{vmatrix} E J_y \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 - \mu \omega_j^2 & \lambda M_0 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \\ \lambda M_0 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 & G J_d \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - \mu i_p^2 \omega_j^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (k = 1, 3, \ldots n-1) \tag{28}$$

übergeht. Die Wurzeln von (28) sind $\omega_j = \omega_k$, ω_{k+1}. Mit (27) und (28) geht (26) in $T^{(2)} = \dot{v}_1^2 + \cdots + \dot{v}_n^2$ und (25) in $A_{\text{klas}} + \lambda \bar{A}_{\text{zus}} = \omega_1^2 v_1^2 + \omega_2^2 v_2^2 + \cdots + \omega_n^2 v_n^2$ über.

Die Überlegungen, die an (14) anknüpfen, gestalten sich folgendermaßen: Für $k = 1$, $\omega_j = 0$ liefert (28) sofort

$$\lambda_1 = \frac{1}{M_0} \frac{\pi}{l} \sqrt{E G J_y J_d}$$

als kleinsten λ-Wert, für den statische Instabilität (Kippen) eintritt. Nun ist λM_0 das tatsächlich aufgebrachte statische Moment, also

$$M_{\text{kipp}} = \lambda_1 M_0 = \frac{\pi}{l} \sqrt{E G J_y J_d}$$

das (bekannte[1]) kleinste Kippmoment.

Schließlich haben wir noch den mit $\varepsilon \cos \omega t$ multiplizierten Teil von A_{zus} zu betrachten und bezeichnen ihn zur Abkürzung mit $\bar{A}_{\text{zus}}$. Es ist jetzt

$$\bar{A}_{\text{zus}} = \varepsilon M_1 \cos \omega t \, \frac{4}{\pi} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{i,k=1}^{n-1}{}' k^2 w_{i+1} w_k \int_0^l \left(\sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \sum_{j=1}^{\infty}{}' \frac{\sin \frac{j\pi x}{l}}{j\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{jy}}\right)^2\right]} \right) dx. \tag{29}$$

Die Integrale können ausgewertet werden, worauf wir noch nicht hier, sondern erst in dem Zahlenbeispiel in Ziff. 12 eingehen. Führt man dann (27) in (29) ein, so erscheint $\bar{A}_{\text{zus}}$ in transformierter Gestalt mit den Variabeln v_k und kann mit $A_{\text{klas}} + \lambda \bar{A}_{\text{zus}}$ und $T^{(2)}$ zu der Normalform (10) von L zusammengesetzt werden, aus der die Differentialgleichungen (11) folgen.

Ein wichtiger Sonderfall tritt ein, wenn ω so klein ist, daß man $1 - (\omega/\omega_{jy})^2 = 1$ für alle $j \geqq 1$ setzen kann. Dann ist nämlich auf Grund der bekannten *Fourier*entwicklung

$$\sum_{j=1}^{\infty}{}' \frac{1}{j} \sin \frac{j\pi x}{l} = \frac{\pi}{4} \quad \text{für } 0 < x < l \tag{30}$$

die Summe Σ' in (18) ebenfalls gleich $\pi/4$, und aus (29) wird einfach

$$\bar{A}_{\text{zus}} = \frac{\pi^2}{2l} \varepsilon M_1 \cos \omega t \sum_{k=1}^{n-1}{}' k^2 w_k w_{k+1},$$

worin noch die Transformationsformeln (27) einzusetzen sind. Man erkennt jetzt, daß die Differentialgleichungen (11) in die getrennten Gleichungspaare

$$\ddot{v}_k + \omega_k^2 v_k + \varepsilon \cos \omega t \, (F_{kk} v_k + F_{k,k+1} v_{k+1}) = 0,$$
$$\ddot{v}_{k+1} + \omega_{k+1}^2 v_{k+1} + \varepsilon \cos \omega t \, (F_{k+1,k} v_k + F_{k+1,k+1} v_{k+1}) = 0$$

---

[1] *Auerbach-Hort*, Handb. d. phys. u. techn. Mech., Bd. IV, 1, S. 122. Leipzig 1931.

zerfallen. Das ist der Fall, den *Woinowsky-Krieger*[1] in etwas anderem Zusammenhang und mit anderen Hilfsmitteln direkt behandelt hat. Wir wollen hier auf diese Dinge nicht näher eingehen, sondern zum Schluß aus den vorstehenden Überlegungen lediglich die Tatsache festhalten, daß das in Ziff. 3 allgemein abgeleitete Differentialgleichungssystem (11) in konkreten Einzelfällen unter Umständen in mehrere getrennte Systeme zerfällt, also hier beispielsweise in die beiden zu den geraden und den ungeraden Koordinatenfunktionen gehörigen Systeme und dann unter bestimmten Voraussetzungen sogar noch weiter in die genannten Gleichungspaare. Es gibt sogar Fälle (der axial pulsierend belastete Stab gehört dazu), in denen sich (11) in lauter unabhängige Einzelgleichungen, also in *Mathieu*-Gleichungen, zerlegt, was aber hier nur erwähnt sei. Wenn wir nun in den nächsten Abschnitten die Integrationstheorie der Gleichungen (11) behandeln, so haben wir dabei, falls der erwähnte Zerfall eintritt, stets eines der selbständigen Teilsysteme vor Augen. Die Zahl N, welche den Ansatz (6) charakterisiert und die Zahl der Gleichungen und Variablen von (11) angibt, kann also größer sein als die Zahl n der Gleichungen des Systems, für das wir in den nächsten Abschnitten die mathematische Theorie entwickeln. Deshalb haben wir schon von (24) ab n statt N geschrieben und rechnen von jetzt ab allgemein mit der Zahl $n \leqq N$ weiter.

Noch eine Bemerkung sei der Vollständigkeit halber hier angefügt: Um ganz korrekt zu sein, müßte man den Ansatz (19) bzw. (24) durch einen entsprechenden Ansatz mit sinus-Koordinatenfunktionen für die lotrechte Zusatzverschiebung v der Stabachse vervollständigen. Dieser Ansatz führt, in die in (15) und (17) weggelassenen Glieder

$$A_{\text{klass}} = \frac{E J_z}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx \quad \text{und} \quad T^{(2)} = \frac{\mu}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx$$

(vgl. (30) und (31) der ersten Mitteilung) eingesetzt, zu weiteren linearen Differentialgleichungen, welche von den anderen unabhängig sind und die freien Eigenschwingungen des Stabes in v-Richtung beschreiben. Den periodischen Faktor $\cos \omega t$ besitzen diese Differentialgleichungen nicht, weil der Ausdruck A_{zus} die Verschiebung v nicht enthält, so daß also das pulsierende Biegemoment M gar nicht eingeht, oder weil anders ausgedrückt die Arbeit der Zusatzverschiebung v an den Grundspannungen keinen quadratischen Anteil A_{zus} liefert. Deshalb kann die Zusatzbewegung in v-Richtung keine Instabilität zeigen und ist eben aus diesem Grunde uninteressant.

II. Abschnitt. Allgemeine Betrachtungen.

5. Theorie der Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten. Wenn man in die Differentialgleichungen (11) die neue Variable

$$s = \omega t \tag{31}$$

einführt und gleichzeitig n statt N schreibt, so kommt

$$\omega^2 \frac{d^2 v_f}{d s^2} + \omega_f^2 v_f + \varepsilon \cos s \sum_{m=1}^{n} F_{fm} v_m = 0 \qquad (f = 1, 2, \ldots n) . \tag{32}$$

Das ist ein System von n homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Seine Lösungen geben den zeitlichen Verlauf der Nachbarbewegungen zum Grundbewegungszustand wieder, lassen also unmittelbar das Stabilitätsverhalten der Grundbewegung erkennen. Die allgemeine Theorie solcher Gleichungen ist an sich bekannt. Doch gelten für das vorgelegte System einige Besonderheiten, und wir müssen als Wegweiser für seine im III. Abschnitt folgende praktische Auflösung die Hauptpunkte der allgemeinen Theorie hier entwickeln[2].

Wir betrachten ein System von Partikularlösungen von (32)

$$v_f = v_{f1}(s), v_{f2}(s), \ldots, v_{f,2n}(s) \quad (f = 1, \ldots, n) . \tag{33}$$

---

[1] S. *Woinowsky-Krieger*, Ing.-Arch. 13 (1942), S. 197.

[2] Vgl. zu den Ausführungen dieses Abschnitts *J. Horn*, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Sammlung Schubert L, § 55, Leipzig 1905, oder *H. Poincaré*, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t. I, § 29. Paris 1892.

Die v_{fk} und ihre Ableitungen $\frac{dv_{fk}}{ds}$ sollen den Anfangsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} v_{fk}(0) &= \begin{cases} 1 \text{ für } k=f \\ 0 \text{ für } k\neq f \end{cases} \\ \frac{dv_{fk}(0)}{ds} &= \begin{cases} 1 \text{ für } k=f+n \\ 0 \text{ für } k\neq f+n \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad (f=1,2,\ldots n;\ k=1,2,\ldots 2n) \tag{34}$$

genügen. Das System (33) bildet dann ein Haupt- oder Fundamentalsystem von Lösungen, die sich, mit $2n$ willkürlichen Konstanten multipliziert, zur allgemeinen Lösung zusammenfügen lassen. Der Begriff des Hauptsystems von Lösungen wird in der Differentialgleichungstheorie gewöhnlich nur für Systeme erster Ordnung aufgestellt. Die Übertragung auf das vorliegende System zweiter Ordnung bedarf aber wohl keiner näheren Erklärung.

Da sich (32) nicht ändert, wenn man s durch $s+2\pi$ ersetzt, so müssen die Lösungen (33) Integrale von (32) bleiben, wenn man in (33) $s+2\pi$ an die Stelle von s setzt. Diese neuen Integrale müssen sich mit bestimmten Koeffizienten α_{ik} linear aus dem Fundamentalsystem (33) zusammensetzen lassen:

$$v_{fk}(s+2\pi) = \alpha_{1k}\, v_{f1}(s) + \alpha_{2k}\, v_{f2}(s) + \cdots + \alpha_{2n,k}\, v_{f,2n}(s) \quad (f=1,2\ldots n;\ k=1,2,\ldots 2n). \tag{35}$$

Setzt man darin $s=0$, so folgt aus (34) für die Konstanten α_{ik} sofort

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{fk} &= v_{fk}(2\pi) \\ \alpha_{f+n,k} &= \frac{dv_{fk}}{ds}(2\pi) \end{aligned}\right\} \quad (f=1,2,\ldots n;\ k=1,2,\ldots 2n). \tag{36}$$

Wir suchen nun besondere partikuläre Lösungen $V_{fr}(s)$ von (32), die an Stelle von (35) den einfachen Beziehungen

$$V_{fr}(s+2\pi) = S_r\, V_{fr}(s) \quad (f=1,2,\ldots n) \tag{37}$$

mit konstantem S_r genügen. Der Index r wird zunächst ohne nähere Bestimmung mitgeführt. Auch die V_{fr} müssen sich als lineare Kombinationen der v_{fk} mit gewissen Konstanten β_{ir} darstellen lassen:

$$V_{fr} = \beta_{1r}\, v_{f1} + \beta_{2r}\, v_{f2} + \cdots + \beta_{2n,r}\, v_{f,2n}. \tag{38}$$

Schreiben wir mit diesem Ansatz die aus (37) folgenden Gleichungen $V_{fr}(2\pi) = S_r\, V_{fr}(0)$ und $\frac{dV_{fr}}{ds}(2\pi) = S_r \frac{dV_{fr}}{ds}(0)$ hin, so erhalten wir unter Beachtung von (34) und (36) das Gleichungssystem für die Koeffizienten $\beta_{1r}, \ldots, \beta_{2n,r}$

$$\left.\begin{aligned} \beta_{1r}(\alpha_{11}-S_r) + \beta_{2r}\,\alpha_{12} + \cdots + \beta_{2n,r}\,\alpha_{1,2n} &= 0, \\ \beta_{1r}\,\alpha_{21} + \beta_{2r}(\alpha_{22}-S_r) + \cdots + \beta_{2n,r}\,\alpha_{2,2n} &= 0, \\ \vdots \\ \beta_{1r}\,\alpha_{2n,1} + \beta_{2r}\,\alpha_{2n,2} + \cdots + \beta_{2n,r}(\alpha_{2n,2n}-S_r) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

und die Bestimmungsgleichung für S_r

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-S_r & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1,2n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-S_r & \cdots & \alpha_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{2n,1} & \alpha_{2n,2} & \cdots & \alpha_{2n,2n}-S_r \end{vmatrix} = 0. \tag{40}$$

Jede Wurzel S_r von (40) führt in (39) eingesetzt zu einem Lösungssystem der β_{ir} und damit nach (38) zu einem System von partikulären Integralen $V_{1r}, \ldots, V_{nr}$, welches die Beziehungen (37) erfüllt.

Setzen wir weiter

$$S_r = e^{2\pi\varrho_r}, \tag{41}$$

so können wir V_{fr} in der Form

$$V_{fr} = e^{\varrho_r s}\,\varphi_{fr}(s) \quad (f=1,2,\ldots n) \tag{42}$$

schreiben, worin $\varphi_{fr}(s)$ nach (37) eine periodische Funktion von s mit der Periode 2π ist. Die Koeffizienten ϱ_r werden charakteristische Exponenten genannt.

Weitere Ergebnisse gewinnt man, wenn man in den Differentialgleichungen (32) und ihren bisher diskutierten Lösungen die Veränderliche s durch $-s$ ersetzt. Das System (32) ändert sich durch diese Substitution nicht. Folglich müssen alle Lösungen von (32) Integrale bleiben, wenn man in ihnen $-s$ an die Stelle von s setzt. Was zunächst das Lösungssystem (33) betrifft, so erkennt man aus der eben angegebenen Tatsache sofort, daß jedes Teilsystem $v_{1k}, \ldots, v_{nk}$ mit $k \leqq n$ lauter gerade Funktionen von s enthält, für die also $v_{fk}(s) = v_{fk}(-s)$ gilt, weil sich weder die Differentialgleichungen noch die Anfangsbedingungen (34) ändern, wenn man s durch $-s$ ersetzt. Ebenso ergibt sich, daß für $k > n$ die Beziehung $v_{fk}(s) = -v_{fk}(-s)$ gilt, daß diese v_{fk} also ungerade Funktionen von s sind, weil bei Ersetzung von s durch $-s$ die Anfangswerte der Ableitungen das Vorzeichen ändern.

Betrachten wir ferner die Lösungen V_{fr}, welche die Beziehungen (37) erfüllen. $V_{fr}(s)$ hat die Eigenschaft, daß es sich mit einer Konstanten S_r multipliziert, wenn man mit s um 2π „vorwärts" schreitet. Folglich multipliziert sich $V_{fr}(s)$ mit $1/S_r$, wenn man mit s den Schritt 2π rückwärts, d. h. in Richtung negativer s geht. Also erfüllen die Funktionen

$$V_{fr}^{*}(s) = V_{fr}(-s) \qquad (f = 1, 2, \ldots n),$$

die nach dem oben Gesagten gleichfalls Lösungen der Differentialgleichungen (32) sind, die Beziehungen

$$V_{fr}^{*}(s + 2\pi) = \frac{1}{S_r} V_{fr}^{*}(s) \qquad (f = 1, 2, \ldots n). \tag{43}$$

Es gibt also zu jeder Lösung (42) eine zugeordnete Lösung

$$V_{fr}^{*} = e^{-\vartheta_r s} \varphi_{fr}^{*}(s) \qquad (f = 1, 2, \ldots n), \tag{44}$$

worin $\varphi_{fr}^{*}(s) = \varphi_{fr}(-s)$ periodisch mit der Periode 2π ist.

Setzen wir auch V_{fr}^{*} in der Form (38) an, so folgt auf Grund der eben ausgesprochenen Eigenschaften der Funktionen v_{fk}

$$V_{fr}^{*} = \beta_{1r} v_{f1} + \cdots + \beta_{nr} v_{fn} - \beta_{n+1,r} v_{f,n+1} - \cdots - \beta_{2n,r} v_{f,2n}.$$

Aus diesem Ausdruck ergibt sich auf demselben Wege, der von (38) zu (39) führte, ein Gleichungssystem, von dem wir nur die ersten n Gleichungen brauchen:

$$\left.\begin{aligned} \beta_{1r}\left(\alpha_{11} - \frac{1}{S_r}\right) + \cdots + \beta_{nr}\alpha_{1n} - \beta_{n+1,r}\alpha_{1,n+1} - \cdots - \beta_{2n,r}\alpha_{1,2n} &= 0, \\ \vdots \\ \beta_{1r}\alpha_{n1} + \cdots + \beta_{nr}\left(\alpha_{nn} - \frac{1}{S_r}\right) - \beta_{n+1,r}\alpha_{n,n+1} - \cdots - \beta_{2n,r}\alpha_{n,2n} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Addiert man die f-te Gleichung (45) zur f-ten Gleichung (39) für $f = 1, 2, \ldots n$, so kommt man sofort auf die einfachere Gleichung für S_r

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - z_r & \alpha_{12} & \cdots\cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - z_r & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots\cdots & \alpha_{nn} - z_r \end{vmatrix} = 0, \tag{46}$$

worin

$$z_r = \frac{1}{2}\left(S_r + \frac{1}{S_r}\right) \tag{47}$$

gesetzt ist. (46) heißt charakteristische Gleichung. Sie ist in der Ausdrucksweise der Algebra eine reziproke Gleichung für S_r, die mit jeder Wurzel S_r auch die Wurzel $1/S_r$ besitzt. Dasselbe gilt natürlich auch für (40).

In z_r ist (46) vom n-ten Grade. Der Index r soll, wie wir jetzt nachträglich festsetzen, die Nummer der Wurzel z_r von (46) angeben, muß also von $r = 1$ bis $r = n$ laufen. Falls (46) n verschiedene Wurzeln $z_r \neq \pm 1$ hat, sind also $2n$ verschiedene Werte S_r vorhanden, für die man aus (39) $2n$ linear unabhängige Lösungssysteme der β_{ir} findet. Damit führt (38) zu n Paaren von partikulären Lösungen V_{fr}, V_{fr}^{*} $(f, r = 1, 2, \ldots n)$ der Form (42), (44), die zusammen ein neues Fundamentalsystem bilden. Ist dagegen eine Wurzel $z_r = +1$ oder -1 oder eine mehrfache Wurzel z_r vorhanden, so liegt mindestens eine mehrfache Wurzel S_r von (40) mit mindestens zweifacher Vielfachheit vor. Dann liefert (39) nach den Sätzen der linearen Algebra nur dann $2n$ linear unabhängige Lösungssysteme der β_{ir} und damit Integrale (42), (44), wenn die Determinante (40) für jedes solche S_r höchstens den Rang „n minus Vielfachheit der Wurzel S_r" hat. Ist der Rang

größer als diese Zahl, so läßt sich das Fundamentalsystem nicht mehr vollständig aus Funktionen der Form (42), (44) aufbauen. In diesem Fall leitet man, wie wir ohne Beweis erwähnen, in der allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten andere Integrale ab, die das Fundamentalsystem vervollständigen und die säkulare Glieder, nämlich gewisse Potenzen von s außerhalb der periodischen und der e-Funktionen, enthalten. Wir brauchen auf die genaue Form dieser entarteten Lösungen nicht im einzelnen einzugehen, sondern merken nur an, daß vermöge der säkularen Glieder stets gewisse Teile der Lösungen mit s dem Betrage nach unbegrenzt anwachsen, was ja für die Beantwortung der Stabilitätsfrage allein wesentlich ist.

6. Formulierung eines allgemeinen Stabilitätskriteriums. Die Integrale V_{fr} und V_{fr}^*, welche die in Ziff. 5 entwickelte traditionelle Theorie der linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten in der Form (42), (44) geliefert hat, sind vielfach nicht reell. Das hängt damit zusammen, daß (40) und (46) keine Säkulargleichungen sind, sondern komplexe Wurzeln besitzen können, was auf zweierlei Arten denkbar ist: Entweder liegt ein konjugiert komplexes Wurzelpaar z_r, z_k von (46) vor. Dann ist auch S_r und S_k nach (47) konjugiert komplex. Oder z_r ist zwar reell, aber die zugehörigen Zahlen S_r und $1/S_r$ sind konjugiert komplex. Auf Grund der algebraischen Beziehungen (38), (39) werden im erstgenannten Fall die Lösungen V_{fr} und V_{fk} konjugiert komplex ausfallen, im zweiten Fall die Lösungen V_{fr} und V_{fr}^*. Aber selbst wenn V_{fr} (und damit auch V_{fr}^*) als Ganzes reell wird, bleiben die Faktoren $e^{\varrho_r s}$ und $\varphi_{fr}(s)$ im allgemeinen doch komplex, denn die Gleichung (41), die wegen der Periodizität der e-Funktion nicht eindeutig nach ϱ_r aufzulösen ist, hat stets komplexe Wurzeln ϱ_r mit verschiedenen Imaginärteilen. Im III. Abschnitt wird es sich zeigen, daß man bei der praktischen Berechnung der ϱ_r zweckmäßig solche komplexen Werte zugrunde legt. Ohne jedoch auf die komplexe Form der Lösungen und die Frage ihrer Verwandlung in eine reelle Form im einzelnen einzugehen, können wir die wesentlichsten Aussagen über unser Hauptproblem, nämlich die Stabilitätsfrage, schon auf Grund der jetzt vorliegenden Ergebnisse machen. Wir können diese Aussagen wahlweise auf zwei Kenngrößen stützen, entweder auf die Realteile der charakteristischen Exponenten ϱ_r oder auf die Wurzeln z_r der charakteristischen Gleichung (46). Die Exponenten ϱ_r, die üblichen Hilfsmittel der einschlägigen Stabilitätsuntersuchungen, werden wir im nächsten Abschnitt ausführlich diskutieren. Zunächst ist es aber einfacher, das abschließende Ergebnis des vorliegenden Abschnitts unmittelbar an die Wurzeln z_r bzw. S_r anzuknüpfen.

Die Zahlen S_r geben vermöge (37) und (43) Auskunft über das Verhalten der Integrale (42), (44) für wachsendes s (d. h. nach (31) für wachsende Zeit), also über die Stabilität der Grundbewegung. Sobald eine Zahl S_r, sei sie reell oder komplex, einen Betrag $\neq 1$ hat, wächst nach (37) oder (43) entweder $|V_{fr}|$ oder $|V_{fr}^*|$ unbegrenzt mit s an, so daß mechanisch also Instabilität herrscht. Zwischen z_r und S_r bestehen nach (47) die Beziehungen

$$\left.\begin{matrix} S_r \\ \dfrac{1}{S_r} \end{matrix}\right\} = z_r \pm \sqrt{z_r^2 - 1}\,. \tag{48}$$

Man erkennt aus ihnen leicht, daß für reelle z_r mit $|z_r|<1$ der Betrag $|S_r| = |1/S_r| = 1$ wird, dagegen für reelle z_r mit $|z_r|>1$ und für komplexe z_r ein Wert $|S_r| \neq 1$ entsteht. Daraus und aus dem oben über die mehrfachen Wurzeln Gesagten ergibt sich folgendes allgemeine Stabilitätskriterium:

Hat die charakteristische Gleichung (46) n verschiedene reelle Wurzeln z_r mit $|z_r|<1$, so ist die Grundbewegung stabil. Ist eine Wurzel z_r von (46) entweder komplex oder reell mit $|z_r|>1$, so ist die Grundbewegung instabil. Hat (46) eine Wurzel $z_r = +1$ oder -1 oder eine mehrfache Wurzel z_r mit $|z_r|<1$, so ist die Grundbewegung im allgemeinen instabil. Stabil ist sie nur in dem Sonderfall, daß die Determinante (40) für jede ihrer zu dem genannten z_r gehörigen Nullstellen S_r bzw. $1/S_r$ einen Rang kleiner oder gleich „n minus Vielfachheit der Nullstelle" hat. Doch ist diese umständlich zu treffende Entscheidung, wie sich zeigen wird, kaum von Interesse.

Die bis hierher geführte Theorie stellt eine vollständige Anweisung zur Beantwortung der Stabilitätsfrage dar. Wenn die Daten über den elastischen Körper, seine Auflagerbedingungen und seine Lasten zahlenmäßig gegeben sind, so liegt die Grundbewegung fest, und man kann nach Ziff. 2 und 3 zunächst die verschiedenen Konstanten der Differentialgleichungen (11) bzw. (32) bestimmen. Dann ist es mit Hilfe eines der bekannten numerischen Integrationsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen grundsätzlich immer möglich, die Lösungen (33) und

damit die Koeffizienten (36) der charakteristischen Gleichung (46) [sowie, falls notwendig, der ergänzenden Gleichung (40)] aufzusuchen, so daß auf Grund des eben zusammengefaßten Kriteriums die Stabilitätsfrage eindeutig entschieden werden kann. Ferner liefern die Wurzeln von (46) über (47) und (41) die charakteristischen Exponenten ϱ_r, deren Realteile als ein Maß für die „Stärke" des Anwachsens der Lösungen (42), (44) betrachtet werden können. Die ϱ_r geben gewissermaßen den Grad der Instabilität einer elastischen Bewegung an und werden insbesondere dann von Wichtigkeit sein, wenn es sich um die Beurteilung der praktischen Bedeutung der Instabilität im konkreten Einzelfall handelt.

III. Abschnitt. Praktische Lösung des Stabilitätsproblems durch Reihenentwicklung.

7. Ansätze für die Reihenentwicklungen. Die in dem vorhergehenden Abschnitt gegebene Lösungsmethode des Stabilitätsproblems ist zwar allgemein anwendbar, hat aber die unverkennbare Schwäche, keinen direkten Einblick in die Abhängigkeit der Stabilitätsverhältnisse von den physikalischen Daten zu liefern. Die im Schrifttum vorhandenen Untersuchungen[1] sind in dieser Beziehung weiter vorgedrungen. Man findet bei Durchsicht der vorliegenden Einzeluntersuchungen immer wieder als wesentlichstes Ergebnis ein Diagramm, in dem die beiden hauptsächlich wichtigen Parameter, nämlich die Lastamplitude und die erregende Frequenz oder gewisse aus ihnen gebildete andere Größen, auf den beiden Achsen eines ebenen Koordinatensystems aufgetragen sind, während die Koordinatenebene in bestimmte Stabilitäts- und Instabilitätsbereiche aufgeteilt erscheint. Ein solches Stabilitätsdiagramm ist mehr als eine mathematisch korrekte, nämlich eine auch physikalisch befriedigende Lösung.

Wir setzen uns nun für unsern allgemeinen Fall ein ähnliches Ziel: Das Stabilitätsverhalten der erzwungenen Schwingung soll in seiner Abhängigkeit von den Parametern ω und ε unmittelbar in Evidenz gesetzt werden durch Abgrenzung von Stabilitäts- und Labilitätsgebieten in der (ω, ε)-Ebene. Zwar lassen sich diese Gebiete zahlenmäßig natürlich nur für konkrete Einzelfälle festlegen. Es wird aber möglich sein, ihre Form und Verteilung in gewissem Umfang allgemein zu kennzeichnen und dazu ein Verfahren anzugeben, das die Grenzen der Instabilitätsbereiche sowie die maßgebenden charakteristischen Exponenten geschlossen aus den Ausgangsdaten zu berechnen gestattet. Diese Rechnung beruht auf einer doppelten Reihenentwicklung, nämlich

1) der Entwicklung der Integrale von (32) in trigonometrische Reihen,
2) der Entwicklung aller vorkommender Koeffizienten nach Potenzen von ε.

Punkt 2) läßt erkennen, daß die Betrachtung von nun an kleine Beträge von ε voraussetzt. Die Rechnung, die sich notwendigerweise auf endlich viele Reihenglieder beschränken muß, liefert Näherungslösungen. Die allgemeine Theorie des vorhergehenden Abschnitts kann daneben eine Bedeutung als Kontrollmittel behalten.

Wir beginnen mit einigen Vorarbeiten zu der eigentlichen Integration der Gleichungen (32). Zuerst sollen die Lösungen (42), (44) in der angekündigten trigonometrischen Reihenform geschrieben werden. Wir setzen dazu die periodische Funktion q_{fr} als komplexe *Fourier*reihe[2]

$$q_{fr} = \sum_{\eta=-\infty}^{+\infty} c_{fr\eta}\, e^{i\eta s}$$

an und führen außerdem statt ϱ_r eine Größe h_r gemäß

$$\varrho = i h_r \tag{49}$$

ein. Dann kommt sofort aus (42), (44)

$$\left.\begin{aligned} V_{fr} &= \sum_{\eta=-\infty}^{+\infty} c_{fr\eta}\, e^{i(h_r+\eta)s}, \\ V_{fr}^{*} &= \sum_{\eta=-\infty}^{+\infty} c_{fr\eta}\, e^{-i(h_r+\eta)s}. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Die Koeffizienten der Reihen (50) sollen durch Potenzentwicklung nach ε berechnet werden.

---

[1] Vgl. die Zusammenstellung am Anfang der ersten Mitteilung. Hinzugekommen ist inzwischen lediglich eine Arbeit über den achsial pulsierend belasteten Stab: *K. Kejwal*, Diss. Hannover 1947.

[2] Der Buchstabe i bedeutet die imaginäre Einheit. Eine Verwechslung mit dem früher benutzten Index i dürfte nicht zu befürchten sein.

Zur Vorbereitung dieser Entwicklungen betrachten wir die Verhältnisse für $\varepsilon = 0$. Die ersten n Lösungen (33) werden für $\varepsilon = 0$, wie man sofort nachrechnet[1],

$$v_{fr}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{ll} \cos \frac{\omega_r}{\omega} s & \text{für } f = r \\ 0 & \text{für } f \neq r \end{array} \right\} (f, r = 1, 2, \ldots n)$$

und somit die Konstanten α_{fr} nach (36)

$$\alpha_{fr}^{(0)} = \left\{ \begin{array}{ll} \cos \frac{2\pi\omega_r}{\omega} & \text{für } f = r \\ 0 & \text{für } f \neq r \end{array} \right\} (f, r = 1, 2, \ldots n) .$$

Damit hat man nach (46) und (47) die Wurzeln

$$\left. \begin{array}{l} z_r^{(0)} = \cos \frac{2\pi\omega_r}{\omega} \\ \text{und} \\ S_r^{(0)} = e^{2\pi i \frac{\omega_r}{\omega}} \end{array} \right\} (r = 1, 2, \ldots n) . \tag{51}$$

Nach (41) und (49) setzen wir deshalb

$$g_r^{(0)} = i \frac{\omega_r}{\omega} \quad \text{und} \quad h_r^{(0)} = \frac{\omega_r}{\omega} \quad (r = 1, 2, \ldots n) . \tag{52}$$

Den Fall $\omega_r = \omega_k$ für $r \neq k$, d. h. das Zusammenfallen zweier Eigenfrequenzen mit verschiedener Nummer, schließen wir von nun an aus. Dann erlauben die Wurzeln (51) der charakteristischen Gleichung (46) für $\varepsilon = 0$ einen ersten Überblick über das gesuchte Diagramm der Stabilitäts- und Instabilitätsbereiche in der (ω, ε)-Ebene. Zunächst ist zu beachten, daß die Koeffizienten α_{fr} nach einem bekannten Satz der Differentialgleichungstheorie stetige Funktionen von ω und ε sind, und daß dasselbe nach einem Satz der Funktionentheorie[2] deshalb auch für die Wurzeln z_r von (46) gilt. Nach dem allgemeinen Kriterium von Ziff. 6 sind die Instabilitätsbereiche in der (ω, ε)-Ebene dadurch gekennzeichnet, daß in ihnen entweder mindestens ein Paar komplexer Wurzeln oder mindestens eine reelle Wurzel, deren Betrag die Eins übertrifft, vorhanden ist. Auf der ω-Achse sind die Wurzeln von (46) nach (51) alle reell, und sie sind überdies absolut genommen < 1, außer in den diskreten Punkten

$$\omega = \omega_0 = \frac{2}{p} \omega_r \qquad (p > 0, \text{ ganz}), \tag{53}$$

in denen die r-te Wurzel $z_r^{(0)} = \pm 1$ ($+$ für gerades, $-$ für ungerades p) wird. Doppelwurzeln auf der ω-Achse treten auf in den diskreten Punkten

$$\omega = \omega_0 = \frac{|\omega_r \pm \omega_k|}{p} \left(\begin{array}{l} p > 0, \text{ ganz} \\ r \neq k \end{array} \right), \tag{54}$$

für welche die r-te Wurzel $z_r^{(0)}$ mit der k-ten Wurzel $z_k^{(0)}$ zusammenfällt. Das Absolutzeichen muß in (54) stehen, weil die Frequenz ω ihrer Natur nach positiv ist.

Die etwa vorhandenen Instabilitätsbereiche können also wegen der stetigen Abhängigkeit der Wurzeln z_r von ω und ε nur in den durch (53) und (54) gegebenen diskreten Punkten auf die ω-Achse auftreffen. In allen anderen Punkten der ω-Achse hat (46) n verschiedene Wurzeln mit Beträgen < 1, so daß hier und auch bis zu einer endlichen Höhe $\varepsilon > 0$[3] darüber Stabilität herrschen muß. Über den Punkten (53) dagegen wird die Wurzel z_r vielleicht in einem gewissen Bereich über Eins ansteigen. Wir nennen einen solchen Bereich, falls er existiert, ein Instabilitätsgebiet erster Art. Ebenso ist mit der Möglichkeit zu rechnen, daß über den Punkten (54) ein konjugiert komplexes Wurzelpaar z_r, z_k auftritt. Derartige Instabilitätsbereiche nennen wir dann solche zweiter Art. Auf die besonderen Fälle, die eintreten, wenn gewisse Werte (53) und (54) zusammenfallen, wenn also zwei der mutmaßlichen Instabilitätsbereiche sich überdecken, kommen wir später zu sprechen.

Die Instabilitätsbereiche erster und zweiter Art sind übrigens gemeinsam dadurch gekennzeichnet, daß der zugehörige Koeffizient h_r in ihnen komplex wird, während im Stabilitätsgebiet alle h_r reell sind. Man schließt das sofort aus der aus (41), (47) und (49) folgenden Gleichung

[1] Der Index oben (0) soll stets den Fall $\varepsilon = 0$ bezeichnen.

[2] *K. Knopp*, Funktionentheorie, Bd. II, Kap. V, 2. Aufl. Berlin u. Leipzig 1926.

[3] Es genügt selbstverständlich, positive ε zu betrachten.

$z_r = \cos 2\pi h_r$ oder auch unmittelbar aus der Form der Lösungen (42), (44), die nur dann eine Exponentialfunktion mit reellem Exponenten als Faktor abspalten, wenn ϱ_r einen nicht verschwindenden Realteil, mithin h_r einen nicht verschwindenden Imaginärteil besitzt. Diese Feststellung wird für unsere Reihenentwicklung von Bedeutung sein. Auf den Grenzlinien der Instabilitätsbereiche erster Art liegt eine Wurzel $z_r = +1$ oder -1 vor, auf den Grenzen der Bereiche zweiter Art eine Doppelwurzel $z_r = z_k$; hier sind also im allgemeinen ausgeartete Lösungen mit Säkulargliedern zu erwarten. Man sieht jetzt, warum diese Lösungen kaum von Interesse sind: sie zeigen zwar Instabilität der Grundbewegung an, aber diese Feststellung ist gerade auf der Grenze belanglos.

Damit können wir die Vorarbeiten zur Reihenintegration von (32) beenden. Die Integration soll sich auf Parameterwerte ω, ε beschränken, die in der (ω, ε)-Ebene in der Nähe der diskreten Punkte ω_0 der ω-Achse liegen. Also wird insbesondere ω in der Nähe der Grundwerte ω_0 bleiben, und man kann F_{fm}, das eine Funktion von ω ist, nach Potenzen von $\omega - \omega_0$ entwickeln:

$$F_{fm} = F_{fm}^{(0)} + (\omega - \omega_0)\, F_{fm}^{(1)} + (\omega - \omega_0)^2\, F_{fm}^{(2)} + \cdots . \tag{55}$$

Die $F_{fm}^{(j)}$ sind darin bekannte Funktionen von ω_0. Ferner dividieren wir (32) mit ω_0^2 durch und führen zur Abkürzung die Bezeichnungen

$$\frac{\omega_r}{\omega_0} = q_r , \qquad \frac{\omega}{\omega_0} = q , \qquad \frac{\omega}{\omega_0} h_r = \bar{q} , \tag{56}$$

$$\frac{F_{fm}^{(0)}}{\omega_0^2} = G_{fm}^{(0)}, \qquad \frac{F_{fm}^{(1)}}{\omega_0} = G_{fm}^{(1)}, \qquad F_{fm}^{(2)} = G_{fm}^{(2)}, \qquad F_{fm}^{(3)}\,\omega_0 = G_{fm}^{(3)}, \ \ldots \tag{57}$$

ein. Schließlich ist es klar, daß die Bestimmung von V_{fr} allein ausreicht, da ja V_{fr}^* aus V_{fr} einfach durch Umkehr des Vorzeichens von s entsteht. Es genügt also, die Differentialgleichungen für $v_f = V_{fr}$ zu betrachten. Sie werden nach (32), (55), (56) und (57)

$$\left.\begin{aligned} q^2 \frac{d^2 V_{fr}}{ds^2} + q_f^2\, V_{fr} + \\ + \varepsilon \cos s \sum_{m=1}^{n} V_{mr} \left(G_{fm}^{(0)} + (q-1)\, G_{fm}^{(1)} + (q-1)^2\, G_{fm}^{(2)} + \cdots\right) = 0 \quad (f = 1, 2, \ldots n) . \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Die Größen q, $\bar{q}$ und $c_{fr\eta}$ werden nun allgemein als Potenzreihen von ε angesetzt. Wir verlangen, daß ω für $\varepsilon = 0$ in ω_0 übergeht, um den im Punkt ω_0 auf die ω-Achse auftreffenden Instabilitätsbereich erfassen zu können. Folglich muß die Reihe für q nach (56) mit 1 beginnen. Ferner wird h_r für $\varepsilon = 0$ nach (52) und (56) gleich q_r, so daß die Reihe für $\bar{q}$ mit q_r anfangen muß. Das Anfangsglied der Reihe für $c_{fr\eta}$ bleibt vorerst noch offen. Unsere Potenzreihenansätze lauten also

$$\left.\begin{aligned} c_{fr\eta} &= c_{fr\eta}^{(0)} + \varepsilon\, c_{fr\eta}^{(1)} + \varepsilon^2\, c_{fr\eta}^{(2)} + \cdots , \\ q &= 1 + \varepsilon\, q^{(1)} + \varepsilon^2\, q^{(2)} + \cdots , \\ \bar{q} &= q_r + \varepsilon\, \bar{q}^{(1)} + \varepsilon^2\, \bar{q}^{(2)} + \cdots . \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Sie sind noch durch eine Aussage über das Anfangsglied q_r der Reihe $\bar{q}$ zu ergänzen. Wenn ω_0 einen Wert (53) oder einen Wert (54) mit dem oberen Vorzeichen $(+)$ bekommt, so ist nach (56)

$$q_r + q_k = p \qquad (r = k \text{ oder } r \neq k;\ p > 0,\ \text{ganz}) . \tag{60}$$

Nimmt dagegen ω_0 einen Wert (54) mit dem unteren Vorzeichen $(-)$ an, so wird nach (56)

$$q_r - q_k = p \qquad (r \neq k;\ p > 0,\ \text{ganz}) . \tag{61}$$

Wir haben in (61) allerdings das Absolutzeichen von (54) nicht übernommen und damit im Falle des Minuszeichens die Voraussetzung $q_r > q_k$ oder $\omega_r > \omega_k$ gemacht, die offenbar mit einer entsprechenden Numerierung der beiden durch (61) verbundenen Eigenfrequenzen ohne Beschränkung der Allgemeinheit zu erfüllen ist.

Zum Verständnis der weiteren Ableitungen ist es ferner wichtig, zu beachten, daß durch die Wahl eines bestimmten ω_0 nach (53) oder (54), d. h. eines bestimmten zu untersuchenden Instabilitätsbereichs, drei bestimmte Ziffern r, k und p herausgestellt werden und gegenüber den veränderlichen Indizes f, m, η vorläufig festzuhalten sind. Der Index r ist gleichzeitig die Nummer des Partikularlösungssystems V_{fr}, das im folgenden berechnet werden soll.

8. Das Rekursionsverfahren zur Berechnung der Reihenglieder. Führt man zunächst die Reihen (50) in (58) ein, faßt die einzelnen Glieder $e^{i(h_r+\eta)s}$ zusammen und setzt ihre Faktoren gleich Null, so folgt

$$\left.\begin{aligned}&\left[(\bar{q}+\eta q)^2-q_f^2\right]c_{fr\eta}-\\&-\frac{\varepsilon}{2}\sum_{m=1}^{n}(c_{mr,\eta-1}+c_{mr,\eta+1})\,(G_{fm}^{(0)}+(q-1)\,G_{fm}^{(1)}+(q-1)^2\,G_{fm}^{(2)}+\cdots)=0\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&(f=1,2,\ldots n;\\&\eta=0,\pm1,\pm2,\ldots).\end{aligned}\qquad(62)$$

In diese Gleichung gehen wir mit den Ansätzen (59) hinein und erhalten durch Vergleich der Potenzen von ε nach kurzer Rechnung die Rekursionsformeln zur sukzessiven Berechnung der Reihenglieder

$$\left[(q_r+\eta)^2-q_f^2\right]c_{fr\eta}^{(0)}=0\,,\qquad(63,0)$$

$$\left.\begin{aligned}\left[(q_r+\eta)^2-q_f^2\right]c_{fr\eta}^{(1)}&=-2\,(q_r+\eta)\,(\bar{q}^{(1)}+\eta\,q^{(1)})\,c_{fr\eta}^{(0)}+\\&+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}G_{fm}^{(0)}\,(c_{mr,\eta-1}^{(0)}+c_{mr,\eta+1}^{(0)})\,,\end{aligned}\right.\qquad(63,1)$$

$$\left.\begin{aligned}\left[(q_r+\eta)^2-q_f^2\right]c_{fr\eta}^{(2)}&=-2\,(q_r+\eta)\,(\bar{q}^{(1)}+\eta\,q^{(1)})\,c_{fr\eta}^{(1)}-\\&-\left[2\,(q_r+\eta)\,(\bar{q}^{(2)}+\eta\,q^{(2)})+(\bar{q}^{(1)}+q^{(1)})^2\right]c_{fr\eta}^{(0)}+\\&+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}G_{fm}^{(0)}\,(c_{mr,\eta-1}^{(1)}+c_{mr,\eta+1}^{(1)})+\\&+\frac{q^{(1)}}{2}\sum_{m=1}^{n}G_{fm}^{(1)}\,(c_{mr,\eta-1}^{(0)}+c_{mr,\eta+1}^{(0)})\,,\end{aligned}\right.\qquad(63,2)$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{aligned}&\left[(q_r+\eta)^2-q_f^2\right]c_{fr\eta}^{(j)}=K_{fr\eta}^{(j)}\\&\text{mit}\\&K_{fr\eta}^{(j)}=-\sum_{\tau=1}^{j}c_{fr\eta}^{(j-\tau)}\sum_{\xi=0}^{\tau}(\bar{q}^{(\xi)}+\eta\,q^{(\xi)})\,(\bar{q}^{(\tau-\xi)}+\eta\,q^{(\tau-\xi)})+\\&\quad+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}G_{fm}^{(0)}\,(c_{mr,\eta-1}^{(j-1)}+c_{mr,\eta+1}^{(j-1)})+\\&\quad+\frac{1}{2}\sum_{\tau=1}^{j-1}\sum_{m=1}^{n}\Gamma_{fm}^{(\tau)}\,(c_{mr,\eta-1}^{(j-\tau-1)}+c_{mr,\eta+1}^{(j-\tau-1)})\,,\end{aligned}\right.\qquad(63,3)$$

$$\vdots$$

In (63,j) ist $q^{(0)}=1$, $\bar{q}^{(0)}=q_r$ zu setzen. Die Größe $\Gamma_{fm}^{(\tau)}$ stellt den Koeffizienten von ε^τ in der am Schluß von (58) stehenden Reihe $(q-1)\,G_{fm}^{(1)}+(q-1)^2\,G_{fm}^{(2)}+\cdots$ dar. Es ist also nach (59)

$$\begin{aligned}\Gamma_{fm}^{(1)}&=q^{(1)}\,G_{fm}^{(1)},\\\Gamma_{fm}^{(2)}&=q^{(2)}\,G_{fm}^{(1)}+q^{(1)2}\,G_{fm}^{(2)},\\\Gamma_{fm}^{(3)}&=q^{(3)}\,G_{fm}^{(1)}+2\,q^{(1)}\,q^{(2)}\,G_{fm}^{(2)}+q^{(1)3}\,G_{fm}^{(3)},\\&\vdots\end{aligned}$$

Allgemein ist $\Gamma_{fm}^{(\tau)}$ ein Polynom aller $q^{(\xi)}$ mit $\xi\leqq\tau$. Die Folge der Gleichungen (63) setzt sich mit (63, j+1), 63, j+2), ... unbegrenzt fort.

Damit das durch (63) vorgeschriebene Rekursionsverfahren eindeutig wird, müssen wir noch einige Festsetzungen treffen. Die Anfangskoeffizienten $c_{fr\eta}^{(0)}$ sind nach (63,0) nur dann von Null verschieden, wenn

$$(q_r+\eta)^2-q_f^2=0\qquad(64)$$

ist, und bleiben dann unbestimmt. Die Beziehung (64) ist nach (60) und (61) erfüllt für die Ziffern

$$\left.\begin{aligned}f&=r\,,\\\eta&=0\end{aligned}\right\}\quad\text{und}\quad\left.\begin{aligned}f&=k\,,\\\eta&=-p\,.\end{aligned}\right\}\qquad(65)$$

Wir verbieten ferner die Erfüllung der Gleichung (64) für alle andern als die in (65) zusammengefaßten Ziffernpaare f, η. Dann wird

$$c^{(0)}_{f\,r\,\eta} = 0$$

für alle f, η außer den in (65) angegebenen, während $c^{(0)}_{r\,r\,0}$ und $c^{(0)}_{k\,r,\,-p}$ unbestimmt bleiben. Über einen der letztgenannten Koeffizienten darf beliebig verfügt werden. Wir setzen deshalb

$$c^{(0)}_{r\,r\,0} = 1$$

und denken uns damit die Lösung (50), die ja nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt ist, mit $c_{r\,r\,0}$ durchdividiert. Dagegen darf man, um die Allgemeinheit zu wahren, $c^{(0)}_{k\,r,\,-p}$ nicht auch $=1$ annehmen; wir schreiben daher vereinfacht

$$c^{(0)}_{k\,r,\,-p} = c^{(0)}$$

und müssen diesen Koeffizienten als vorläufig unbestimmte Konstante in der Rechnung mitführen.

Als Zwischenbemerkung sei hier kurz notiert, was das eben ausgesprochene Verbot der Beziehung (64) bedeutet. Nach (53), (54) und (56) läßt sich (64) in

$$\eta(\omega_r \pm \omega_k) + p(\omega_r \pm \omega_f) = 0 \quad (k, f, r = 1, 2, \ldots n;\ p, \eta \text{ ganz}) \tag{66}$$

umformen. Damit sind also gewisse lineare Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten zwischen je drei Eigenfrequenzen $\omega_k, \omega_r, \omega_f$ ausgeschlossen. Dieses Verbot müssen wir in Erweiterung der schon oben eingeführten Forderung $\omega_r \neq \omega_k$ für $r \neq k$ aussprechen; seine Verletzung würde in den folgenden Entwicklungen die Bildung der Reihenglieder unmöglich machen.

Nachdem über die Koeffizienten $c^{(0)}_{f\,r\,\eta}$ in der angegebenen Weise verfügt ist, lassen sich die Koeffizienten $c^{(j)}_{f\,r\,\eta}$ mit $j>0$ durch sukzessive Berechnung der rechten Seiten von (63,1), (63,2), ... unmittelbar bestimmen, soweit ihre Indizes f, η von (65) abweichen. Dagegen steht in (63) für die Ziffern (65) links Null, weshalb für eben diese Ziffern f, η die $K^{(j)}_{f\,r\,\eta}$ verschwinden müssen und die entsprechenden $c^{(j)}_{f\,r\,\eta}$ wiederum unbestimmt bleiben, und zwar für alle j. Da aber die Lösung V_{fr} mit $c_{r\,r\,0}$ durchdividiert sein soll, muß

$$c^{(j)}_{r\,r\,0} = 0 \quad \text{für} \quad j > 0$$

gesetzt werden, während die

$$c^{(j)}_{k\,r,\,-p} = c^{(j)} \quad (j \geqq 0)$$

als zunächst freibleibende Konstante in der Rechnung mitzuführen sind. Das Verschwinden der $K^{(j)}_{f\,r\,\eta}$ für die Ziffern (65) läßt sich durch geeignete Bestimmung der $q^{(j)}$ und $\bar{q}^{(j)}$ erzwingen. Die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} K^{(j)}_{r\,r\,0} &= 0 \quad \text{(erste Hauptgleichung)}, \\ K^{(j)}_{k\,r,\,-p} &= 0 \quad \text{(zweite Hauptgleichung)} \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

sind somit als Bestimmungsgleichungen für $q^{(j)}$ und $\bar{q}^{(j)}$ zu benutzen.

Damit ist das Rekursionsverfahren eindeutig vorgeschrieben. Es liefert durch sukzessive Auflösung von (63) und (67) die Koeffizienten $c^{(j)}_{f\,r\,\eta}$, $q^{(j)}$ und $\bar{q}^{(j)}$ und damit die Lösungen V_{fr} in Abhängigkeit von den vorläufig noch freibleibenden Parametern $c^{(0)}, c^{(1)}, \ldots$.

9. Entwicklung der Hauptgleichungen. Es kommt im folgenden hauptsächlich darauf an, die durch (67) eingeführten Hauptgleichungen näher zu studieren und daraus die Grenzen der gesuchten Instabilitätsbereiche sowie die Größe der charakteristischen Exponenten abzuleiten.

Dazu müssen wir zunächst den Mechanismus der Gliederbildung in unserem Rekursionsverfahren näher betrachten und bedienen uns dazu des in Abb. 2 wiedergegebenen Schemas. Wir betrachten ein Quadratnetz der skizzierten Art und beziffern darin die Zeilen von der oberen Begrenzung an nach unten mit j und die Spalten von einer beliebigen mittleren Spalte aus mit η (nach rechts positive, nach links negative η). In das quadratische Feld, in dem sich die η-te Spalte und die j-te Zeile kreuzen, denken wir uns die n Koeffizienten $c^{(j)}_{f\,r\,\eta}$ $(f = 1, 2, \ldots n)$ eingeschrieben. Außerdem soll in der Spalte $\eta = 0$ der Ausdruck $K^{(j)}_{r\,r\,0}$ (die linke Seite der ersten Hauptgleichung (67)) und in der Spalte $\eta = -p$ der Ausdruck $K^{(j)}_{k\,r,\,-p}$ (die linke Seite der zweiten Hauptgleichung (67)) zusätzlich in die j-te Zeile eingetragen werden. Schließlich setzen wir noch fest, daß bei der Ausfüllung der Tabelle durch sukzessive Auflösung von (63,1), (63,2) nach $c^{(1)}_{f\,r\,\eta}$, $c^{(2)}_{f\,r\,\eta}$, ... die ergänzende Auflösung der Hauptgleichungen (67) nach $q^{(j)}$ und $\bar{q}^{(j)}$ vor-

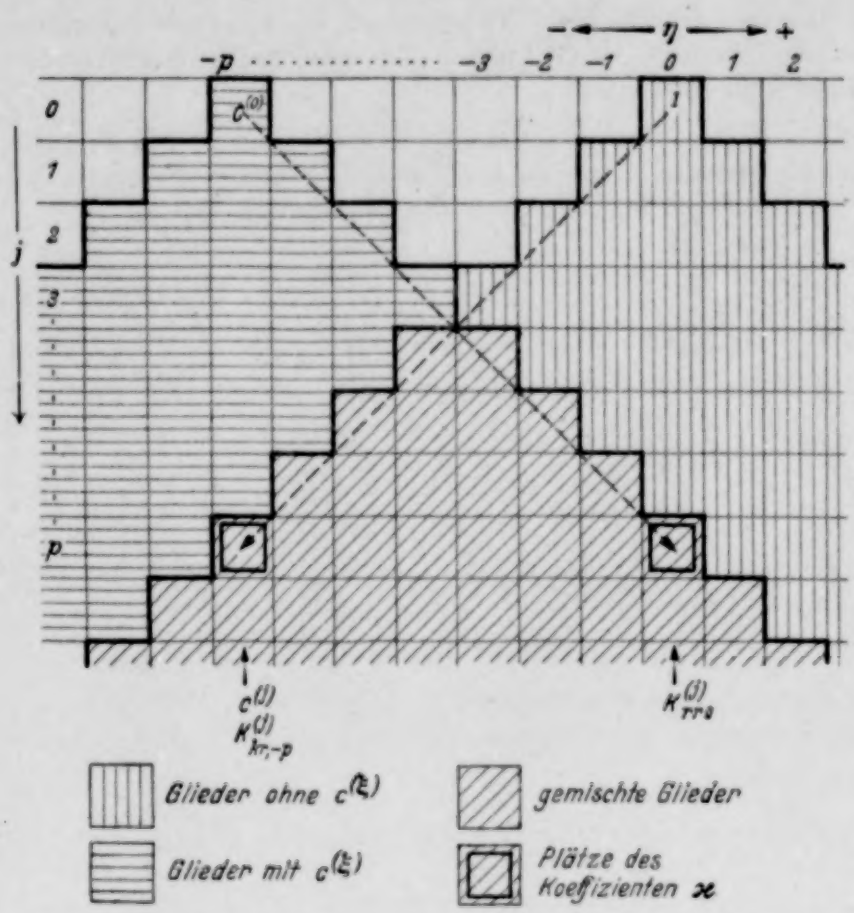

Abb. 2. Tabellenschema zur Berechnung der Reihenglieder.

erst noch zurückgestellt werden soll. Vielmehr sollen sämtliche Größen explizite in ihrer durch (63) gegebenen Abhängigkeit von den $q^{(\xi)}$ und $\bar{q}^{(\xi)}$ eingetragen werden. Dann lassen sich aus dem Schema sofort die folgenden Feststellungen ablesen:

1) Die Ausfüllung der Tabelle erfolgt Zeile für Zeile von oben nach unten. Die höchste Zeile $j=0$ enthält in dem Quadrat $\eta=0$ allein die Größe 1 und in dem Quadrat $\eta=-p$ nur die Größe $c^{(0)}$. Alle andern Quadrate der Zeile $j=0$ sind leer. Ein beliebiges Glied an irgendeiner Stelle der Tabelle wird, weil in einer Gleichung (63, j) neben dem Index η nur noch die Indizes $\eta-1$ und $\eta+1$ auftreten, nur aus solchen Gliedern erzeugt, die lotrecht über ihm und schräg über ihm auf den 45°-Linien stehen. Die Tabelle enthält daher Eintragungen nur in den schraffierten Gebieten. Die weiß gelassenen Quadrate bleiben leer. Die linken Seiten der Hauptgleichungen (67) haben ihren Platz in den beiden ausgezeichneten Spalten $\eta=0$ und $\eta=-p$. Die vereinfacht mit $c^{(j)}$ bezeichneten Koeffizienten $c^{(j)}_{kr,-p}$ stehen in der Spalte $\eta=-p$.

2) In dem lotrecht schraffierten Gebiet gehen alle Glieder von dem Anfangsglied 1 aus. Der Anfangskoeffizient $c^{(0)}$ kann nach dem unter 1) Gesagten keinen Beitrag liefern, ebensowenig einer der tiefer stehenden Koeffizienten $c^{(\xi)}$. Alle Glieder in dem lotrecht schraffierten Gebiet sind daher frei von allen $c^{(\xi)}$ ($\xi \geqq 0$). Umgekehrt tritt in dem waagerecht schraffierten Gebiet kein Glied ohne ein $c^{(\xi)}$ auf. In dem schräg schraffierten Gebiet stehen gemischte Glieder, die aus Teilen mit $c^{(\xi)}$ und aus Teilen ohne $c^{(\xi)}$ zusammengesetzt sind.

3) Die unter 2) genannte Abhängigkeit der Tabellenglieder von den $c^{(\xi)}$ ist linear. Das ist eine selbstverständliche Folge des Umstandes, daß die Gleichungen (63) in den $c^{(\xi)}_{fr\eta}$, $c^{(\xi)}_{mr,\eta-1}$ und $c^{(\xi)}_{mr,\eta+1}$ linear sind. Eine Aussage über die Faktoren der $c^{(\xi)}$ in den Tabellengliedern leiten wir aus einer weiteren bemerkenswerten Eigenschaft der Gleichungen (63) her. In (63, j) stehen die Koeffizienten $c^{(\zeta)}_{fr\eta}$, $c^{(\zeta)}_{mr,\eta-1}$, $c^{(\zeta)}_{mr,\eta+1}$ ($\zeta=0,1,2,\ldots j$), multipliziert mit bestimmten Faktoren. Betrachtet man daneben die Gleichung (63, j+ξ) ($\xi>0$, ganz), so findet man darin dieselben Faktoren wieder, aber jetzt entsprechend multipliziert mit den Koeffizienten $c^{(\zeta+\xi)}_{fr\eta}$, $c^{(\zeta+\xi)}_{mr,\eta-1}$, $c^{(\zeta+\xi)}_{mr,\eta+1}$. Das läßt sich durch ausführliches Anschreiben von (63, j) und (63, j+ξ) leicht verifizieren und folgt im übrigen aus dem Umstand, daß (63) durch Ausmultiplizieren der Potenzreihen (59) in den Gleichungen (62) entstanden ist. Wenn also der höchststehende Koeffizient $c^{(0)}$ im Verlauf der Rekursion in dem unter ihm liegenden Gebiet der Tabelle, begrenzt durch die beiden von ihm ausgehenden 45°-Linien, bestimmte Anteile in den Tabellengliedern mit dem Faktor $c^{(0)}$ erzeugt, so muß der um ξ Zeilen tiefer stehende Koeffizient $c^{(\xi)}$ an entsprechender Stelle des gegenüber dem obengenannten um ξ Zeilen tiefer gerückten Gebiets dieselben Gliedanteile hervorbringen, aber jetzt mit dem Faktor $c^{(\xi)}$ statt $c^{(0)}$. Ist nämlich einer der erstgenannten Terme mit dem Faktor $c^{(0)}$ durch Berechnung aus den Gleichungen (63, 1), (63, 2), ...(63, j) gefunden, so folgt der entsprechende zweitgenannte mit dem Faktor $c^{(\xi)}$ wegen der angegebenen Eigenschaft der Rekursionsformeln in genau dem gleichen Rechnungsgang aus den Gleichungen (63, 1+ξ), (63, 2+ξ)...(63, j+ξ). Mit anderen Worten: die Glieder in einem beliebigen Feld

des waagerecht und des schräg schraffierten Gebietes der Tabelle sind lineare Funktionen der Parameter $c^{(0)}$, $c^{(1)}$, $c^{(2)}$, ... $c^{(j)}$, wobei die Faktoren von $c^{(\xi)}$ gleich den entsprechenden Faktoren von $c^{(0)}$ in dem um ξ Zeilen höher liegenden Feld sind.

Auf Grund der Gleichungen (63) und der eben getroffenen Feststellungen 1) bis 3) kann nun der Bau der Hauptgleichungen (67) genauer angegeben werden. Wir stellen zunächst die Ergebnisse zusammen und bringen anschließend die erforderlichen Begründungen.

Die erste Hauptgleichung lautet

$$2\,q_r\,\overline{q}^{(j)} = \begin{cases} B^{(j)} & \text{für } 0<j<p\,, \quad (68)\\ B^{(j)}+\varkappa\,c^{(0)} & \text{für } j=p\,, \quad (69)\\ B^{(j)}+\varkappa\,c^{(j-p)} & \text{für } j>p\,, \quad (70)\end{cases}$$

und die zweite Hauptgleichung wird

$$(\mp)\,2\,q_k\,(\overline{q}^{(j)}-p\,q^{(j)})\,c^{(0)} = \begin{cases} D^{(j)}\,c^{(0)} & \text{für } 0<j<p\,, \quad (71)\\ D^{(j)}\,c^{(0)}+\varkappa & \text{für } j=p\,, \quad (72)\\ D^{(j)}+D^{(p)}\,c^{(j-p)}\,(\pm)\,2\,q_k\,(\overline{q}^{(p)}-p\,q^{(p)})\,c^{(j-p)} & \text{für } j>p\,. \quad (73)\end{cases}$$

Darin sind die $B^{(j)}$ und $D^{(j)}$ in ihrem analytischen Aufbau

rationale Funktionen der Gleichungskonstanten $G^{(0)}_{fm}$, $G^{(1)}_{fm}$, ..., q_f,
Polynome von $q^{(1)}$, $\overline{q}^{(1)}$, $q^{(2)}$, $\overline{q}^{(2)}$, ..., $q^{(j-1)}$, $\overline{q}^{(j-1)}$,
für $j \leqq p$ frei von allen $c^{(\xi)}$ $(\xi \geqq 0)$,
für $j>p$ linear abhängig von $c^{(0)}$, $c^{(1)}$, ... $c^{(j-p-1)}$,
für $j=1$ gleich Null.

Die Konstante $\varkappa$ wird unten angegeben. In (71) bis (73) treten doppelte Vorzeichen auf. Die oberen, nicht eingeklammerten Vorzeichen stehen, wenn zwischen q_k und q_r die Gleichung (60) gilt, während die unteren, eingeklammerten Vorzeichen aus (61) folgen. Stets, wenn von nun ab das Doppelvorzeichen $(\pm)$ oder $(\mp)$ auftritt, bezieht es sich in derselben Weise auf die Gleichungen (60) und (61).

Zur Begründung dieser Behauptungen genügt der Hinweis auf einige wenige Punkte. Daß sich in (68) bis (70) $2\,q_r\,\overline{q}^{(j)}$ und in (71) bis (73) $(\mp)\,2\,q_k\,(\overline{q}^{(j)}-p\,q^{(j)})\,c^{(0)}$ auf die linke Seite des Gleichheitszeichens bringen läßt, erkennt man sofort, wenn man die Ausdrücke $K^{(j)}_{rr\,0}$ bzw. $K^{(j)}_{kr,\,-p}$ nach (63, j) unter Beachtung von (60) und (61) ausführlich hinschreibt. Für $j<p$ folgen dann die linken Seiten von (68) und (71) unmittelbar aus der Tatsache, daß $K^{(j)}_{rr\,0}$ in der Tabelle Abb. 2 in dem lotrecht schraffierten und $K^{(j)}_{kr,\,-p}$ in dem waagerecht schraffierten Gebiet steht. Gleichung (71) lautet nach der vorhergehenden Feststellung 3) über die Eigenschaften der Tabellenglieder ausführlich

$$(\mp)\left[2\,q_k\,(\overline{q}^{(j)}-p\,q^{(j)})\,c^{(0)}+2\,q_k\,(\overline{q}^{(j-1)}-p\,q^{(j-1)})\,c^{(1)}+\cdots+2\,q_k\,(\overline{q}^{(1)}-p\,q^{(1)})\,c^{(j-1)}\right] = D^{(j)}\,c^{(0)}+D^{(j-1)}\,c^{(1)}+\cdots+D^{(1)}\,c^{(j-1)}\,.$$

Da sich hierin aber die Glieder mit $c^{(j-1)}$, $c^{(j-2)}$, ... auf Grund der vorhergehenden, d. h. für $j=1$, $j=2$, ... aufgestellten Gleichungen (71) herausheben, bleibt die Gleichung allgemein in der Form (71) stehen.

Für $j=p$ tritt in (69) ein Glied $\varkappa\,c^{(0)}$ und in (72) ein Glied $\varkappa$ ohne Faktor $c^{(0)}$ auf. Die Plätze dieser Glieder in der Tabelle Abb. 2 sind die doppelt umrandeten Quadrate, und man findet die Größe des Koeffizienten $\varkappa$ offenbar dadurch, daß man von den Anfangsgliedern $c^{(0)}$ bzw. 1 ausgehend nacheinander die mit dem Faktor $c^{(0)}$ bzw. 1 behafteten Anteile derjenigen Tabellenglieder berechnet, die in den Feldern auf den beiden gestrichelten 45°-Linien liegen. Da es auf den Koeffizienten $\varkappa$ im folgenden besonders ankommt, sei die Teilrekursion, die zu seiner Ermittlung führt, hier angegeben.

Wir behalten in dieser Rechnung der Einfachheit halber die Bezeichnung $c^{(\xi)}_{fr\eta}$ bei, obwohl die angeschriebenen Größen nur Koeffizientenanteile darstellen. Zuerst gehen wir aus von $c^{(0)}_{rr\,0}=1$ und schreiten auf der in Abb. 2 nach links unten laufenden gestrichelten Diagonale fort, haben also nacheinander $c^{(1)}_{fr,\,-1}$, $c^{(2)}_{fr,\,-2}$, ... zu bestimmen. Aus (63) folgt sofort

$$c^{(1)}_{f\,r,\,-1} = \frac{\frac{1}{2}\,G^{(0)}_{f\,r}}{(q_r-1)^2-q_f^2}\,,$$
$$\vdots$$
$$c^{(j)}_{f\,r,\,-j} = \frac{\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} G^{(0)}_{f\,m}\; c^{(j-1)}_{m\,r,\,-(j-1)}}{(q_r-j)^2-q_f^2}\,,$$
$$\vdots$$

Nach $p-1$ Schritten ergibt sich der Anteil von $K^{(p)}_{k\,r,\,-p}$, der aus den berechneten Größen zusammengesetzt ist, zu

$$\varkappa = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} G^{(0)}_{k\,m}\; c^{(p-1)}_{m\,r,\,-(p-1)}$$

oder nach Rückwärtseinsetzen der vorstehenden Ausdrücke zu

$$\varkappa = \frac{1}{2^p}\sum_{r_1,\,r_2,\,\cdots,\,r_{p-1}=1}^{n} \frac{G^{(0)}_{r\,r_1}\,G^{(0)}_{r_1\,r_2}\cdots G^{(0)}_{r_{p-2}\,r_{p-1}}\,G^{(0)}_{r_{p-1}\,k}}{\left[(q_r-1)^2-q^2_{r_1}\right]\cdots\left[(q_r-(p-1))^2-q^2_{r_{p-1}}\right]}\,. \tag{74}$$

Nehmen wir zweitens die Ausgangsgröße $c^{(0)}_{k\,r,\,-p} = c^{(0)}$ vor und gehen von ihr aus auf der anderen in Abb. 2 gestrichelt eingetragenen Diagonale weiter, so kommt entsprechend

$$c^{(1)}_{f\,r,\,-(p-1)} = \frac{\frac{1}{2}\,G^{(0)}_{f\,k}\;c^{(0)}}{(q_r-(p-1))^2-q_f{}^2}\,,$$
$$\vdots$$
$$c^{(j)}_{f\,r,\,-(p-j)} = \frac{\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} G^{(0)}_{f\,m}\; c^{(j-1)}_{m\,r,\,-(p-j+1)}}{(q_r-(p-j))^2-q_f{}^2}\,,$$
$$\vdots$$

und nach $p-1$ Schritten der zugehörige Anteil von $K^{(p)}_{r\,r\,0}$

$$\varkappa = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} G^{(0)}_{r\,m}\; c^{(p-1)}_{m\,r,\,-1}\,,$$

woraus sich durch Rückwärtseinsetzen und Herausheben von $c^{(0)}$

$$\varkappa = \frac{1}{2^p}\sum_{f_1,\,f_2,\,\cdots,\,f_{p-1}=1}^{n} \frac{G^{(0)}_{k\,f_1}\,G^{(0)}_{f_1\,f_2}\cdots G^{(0)}_{f_{p-2}\,f_{p-1}}\,G^{(0)}_{f_{p-1}\,r}}{\left[(q_r-(p-1))^2-q^2_{f_1}\right]\cdots\left[(q_r-1)^2-q^2_{f_{p-1}}\right]} \tag{75}$$

ergibt. Die Indizes $r_1, r_2, \ldots r_{p-1}$ in der Summe (74) durchlaufen ebenso wie die Indizes $f_1, f_2, \ldots f_{p-1}$ in der Summe (75) unabhängig voneinander die Zahlen 1 bis n. Zu jedem Glied von (74) mit der Indexfolge $r_1, \ldots r_{p-1}$ gibt es daher in (75) ein entsprechendes Glied mit der Indexfolge $f_1 = r_{p-1}$, $f_2 = r_{p-2}, \ldots f_{p-1} = r_1$. Diese beiden Glieder haben gleiche Zähler und gleiche Nenner. Die beiden Summen (74) und (75) sind also gleich. Ergänzend sei noch vermerkt, daß sich $\varkappa$ für $p=1$ nicht unmittelbar aus (75) bzw. (74) entnehmen läßt. Aus der Ableitung dieser Gleichungen folgt aber sogleich

$$\varkappa = \frac{1}{2}\,G^{(0)}_{r\,k} \quad \text{für } p=1\,. \tag{76}$$

Schließlich ist noch der Fall $j > p$ zu betrachten. (70) muß linear $c^{(j-p)}$ enthalten mit demselben Faktor $\varkappa$, den $c^{(0)}$ in (69) besitzt. Ferner zeigt die Stellung von $K^{(j)}_{r\,r\,0}$ in der Tabelle Abb. 2 an, daß $B^{(j)}$ außerdem $c^{(0)}, c^{(1)}, \ldots c^{(j-p-1)}$ linear enthält, aber kein $c^{(\xi)}$ mit $\xi \geqq j-p$. Ebenso muß in (73) $c^{(j-p)}$ mit dem gleichen Faktor multipliziert sein wie $c^{(0)}$ in (72). Daneben steht D^j, als lineare Funktion von $c^{(0)}$, $c^{(1)}, \ldots c^{(j-p-1)}$, $c^{(j-p+1)}, \ldots c^{(j)}$. Darin ist der Faktor von $c^{(\xi)}$ gleich dem Faktor von $c^{(0)}$ in der um ξ Schritte vorhergehenden Gleichung. Für $\xi > j-p$ ist dieser Faktor gleich $D^{(j-\xi)}\,(\pm)\,2\,q_k\,(\overline{q}^{(j-\xi)} - p\,q^{(j-\xi)})$ und verschwindet auf Grund von (71). Somit bleibt $D^{(j)}$ als lineare Funktion von $c^{(0)}, c^{(1)}, \ldots c^{(j-p-1)}$ stehen. Endlich folgt $B^{(1)} = D^{(1)} = 0$ unmittelbar aus (63, 1). Damit ist die oben angegebene Form der Hauptgleichungen wohl ausreichend begründet.

Um $q^{(j)}$ und $\overline{q}^{(j)}$ aus den Hauptgleichungen getrennt zu erhalten, setzen wir weiter $\overline{q}^{(j)}$ aus (68) bis (70) in (71) bis (73) ein. Dann kommt statt (71) bis (73)

$$2\,q_k\,p\,q^{(j)} = \begin{cases} E^{(j)} & \text{für } j < p\,, \quad (77) \\ E^{(j)} + \varkappa\left[\dfrac{q_k}{q_r}\,c^{(0)}\,(\pm)\,\dfrac{1}{c^{(0)}}\right] & \text{für } j = p\,, \quad (78) \\ E^{(j)} + \varkappa\,c^{(j-p)}\left[\dfrac{q_k}{q_r}\,(\mp)\,\dfrac{1}{c^{(0)^2}}\right] & \text{für } j > p\,, \quad (79) \end{cases}$$

mit

$$E^{(j)} = \frac{q_k}{q_r}\,B^{(j)}\,(\pm)\begin{cases} D^{(j)} & \text{für } j \leqq p\,, \\ D^{(j)}/c^{(0)} & \text{für } j > p\,. \end{cases}$$

Nach dem oben über die $B^{(j)}$ und $D^{(j)}$ Gesagten sind die $q^{(j)}$ und $\overline{q}^{(j)}$ in der durch (68) bis (70) und (77) bis (79) gegebenen Form Polynome der $q^{(\xi)}$ und $\overline{q}^{(\xi)}$ mit $\xi < j$. Diese Abhängigkeit läßt sich offenbar durch sukzessives Einsetzen von $q^{(1)}$, $\overline{q}^{(1)}$ in $q^{(2)}$, $\overline{q}^{(2)}$, von $q^{(1)}$, $\overline{q}^{(1)}$ und $q^{(2)}$, $\overline{q}^{(2)}$ in $q^{(3)}$, $\overline{q}^{(3)}$ usf. eliminieren. Die Gleichungen (68) bis (70) und (77) bis (79) behalten bei diesem Verfahren ihre äußere Gestalt, aber ihre rechten Seiten bekommen einen anderen analytischen Bau:

Die $B^{(j)}$ und $E^{(j)}$ werden für $j \leqq p$ Konstante, die nur von den Gleichungskonstanten $G^{(0)}_{fm}$, $G^{(1)}_{fm}$, ... und q_f abhängen, und für $j > p$ Polynome von $1/c^{(0)}$, $c^{(0)}$, $c^{(1)}$, ... $c^{(j-p-1)}$. Deshalb sind die $q^{(j)}$ und $\overline{q}^{(j)}$ für $j < p$ Konstante, während sie für $j \geqq p$ Polynome von $1/c^{(0)}$, $c^{(0)}$, $c^{(1)}$, ... $c^{(j-p)}$ werden. Die Abhängigkeit der $q^{(p)}$, $\overline{q}^{(p)}$ von $c^{(0)}$ ist durch (69), (78) explizit angegeben, ebenso die Abhängigkeit der $q^{(j)}$, $\overline{q}^{(j)}$ $(j > p)$ von $c^{(j-p)}$ durch (70), (79). Auf diesen Punkt kommt es im folgenden besonders an. Bemerkenswert ist noch, daß wegen $B^{(1)} = D^{(1)} = 0$ auch $E^{(1)} = 0$ ist, woraus $q^{(1)} = \overline{q}^{(1)} = 0$ für $p > 1$ folgt.

An diese umgeformte Gestalt (68) bis (70) und (77) bis (79) der Hauptgleichungen knüpft die weitere Diskussion an.

10. Bestimmung der Grenzen der Instabilitätsbereiche und der charakteristischen Exponenten. Die Funktion $q = q(\varepsilon) = 1 + \varepsilon q^{(1)} + \cdots$ stellt geometrisch gedeutet eine Kurve in einem (q, ε)-Koordinatensystem dar. Durch Multiplikation von $q(\varepsilon)$ mit ω_0 erhält man nach (56) eine Kurve $\omega = \omega(\varepsilon) = \omega_0\,q(\varepsilon)$ in der (ω, ε)-Ebene, dem Ausgangs- und Zielpunkt unserer Betrachtung. Wir sprechen im folgenden kurz von der Kurve q.

Die vorhergehende Ziff. 9 brachte zum Schluß das Ergebnis, daß die $q^{(j)}$ und $\overline{q}^{(j)}$ für $j < p$ Konstante und für $j \geqq p$ Funktionen der Parameter $c^{(\xi)}$ $(\xi \leqq j - p)$ sind. Sind alle $c^{(\xi)}$ reell, so werden alle $q^{(j)}$ und $\overline{q}^{(j)}$ reell, d. h. man hat nach (59) und (56) ein reelles h_r, so daß die Partikularlösungen (50) nicht unbegrenzt wachsen, sondern sich stabil verhalten. Im Instabilitätsfall dagegen muß es komplexe $c^{(\xi)}$ geben, derart, daß für $j \geqq p$ die $\overline{q}^{(j)}$ komplex und die $q^{(j)}$ gleichzeitig reell werden. Dann ist nämlich nach (59) $\overline{q}$ und nach (56) h_r komplex, so daß also die Lösung (50) einen anwachsenden Faktor abspaltet, mithin die zugehörige reelle Kurve q in einem Instabilitätsbereich liegt. Wir stellen die Frage, ob dieser Fall möglich ist.

Zur Beantwortung knüpfen wir an (78) an und schreiben darin $c^{(0)}$ allgemein als komplexe Zahl

$$c^{(0)} = R\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.$$

Sie liefert in (78) eingesetzt den Imaginärteil von $2\,q_k p\,q^{(p)}$

$$J\,(2\,q_k\,p\,q^{(p)}) = \varkappa\left[\frac{q_k}{q_r}\,R\,(\mp)\,\frac{1}{R}\right]\sin\varphi\,,$$

der verschwinden muß, wenn $q^{(p)}$ reell bleiben soll. Er ist Null

$$\begin{aligned} &\text{entweder für } R^2 = (\pm)\,\frac{q_r}{q_k}\,, && \varphi \text{ beliebig} \\ &\text{oder für } \varphi = 0\,, && R \text{ beliebig.} \end{aligned}$$

Die zweite Möglichkeit führt allerdings vom Wege ab, denn sie bedeutet reelles $c^{(0)}$.

Wir betrachten nun zuerst den Fall, daß (61) erfüllt ist und somit in den vorstehenden Formeln das eingeklammerte, untere Vorzeichen gilt. Da die Gleichung $R^2 = -\,q_r/q_k$ durch kein reelles R befriedigt wird, kann $c^{(0)}$ nicht komplex sein, sondern es liegt jetzt der Fall eines reellen $c^{(0)}$ vor. Dann müssen aber nach (79) auch $c^{(1)}$, $c^{(2)}$, ... reell sein, damit kein komplexes $q^{(j)}$

auftritt. Dadurch ist die oben gestellte Frage verneint. Man kann den $q^{(j)}$ für $j \geqq p$ beliebige Werte vorschreiben und die Gleichungen (78), (79) sukzessive durch geeignete reelle Zahlen $c^{(0)}, c^{(1)}, \ldots$ stets erfüllen. Die in dieser Weise unter der Voraussetzung (61) aus den Hauptgleichungen folgende Schar von Kurven q ($q^{(j)}$ für $j < p$ festgelegt, für $j \geqq p$ beliebig) enthält also keine einzige Kurve, auf der Instabilität herrscht. Vergleicht man diesen Sachverhalt mit dem im folgenden für den Fall der Gleichung (60) diskutierten, so wird man ihn ohne Bedenken dahin deuten, daß von den Punkten $\omega_0 = (\omega_r - \omega_k)/p$, $\varepsilon = 0$ der (ω, ε)-Ebene keine Instabilitätsbereiche ausgehen. Ein mathematisch strenger Beweis für die Nichtexistenz dieser Bereiche liegt allerdings nicht vor. Er ist mit unsern Hilfsmitteln, nämlich der Aufstellung rein formaler Reihenentwicklungen ohne Konvergenzuntersuchung, auch gar nicht möglich, ebensowenig wie die folgende Berechnung von Instabilitätsbereichen auf Grund von (60) als strenger Existenzbeweis gelten kann. Wir lassen aber den Fall (61) im vorliegenden Abschnitt von jetzt ab beiseite.

Anders liegen die Dinge, wenn wir die Gleichung (60) zugrunde legen und somit in allen Gleichungen das obere, nicht eingeklammerte Vorzeichen berücksichtigen. Jetzt ist $R = \sqrt{q_r/q_k}$ reell und

$$c^{(0)} = \sqrt{\frac{q_r}{q_k}}\,(\cos\varphi + i \sin\varphi) \tag{80}$$

komplex mit beliebigem reellem φ. Aus (78) folgt nun

$$2\, q_k\, p\, q^{(p)} = E^{(p)} + 2\,\varkappa \sqrt{\frac{q_k}{q_r}}\,\cos\varphi \tag{81}$$

und aus (69)

$$2\, q_r\, \overline{q}^{(p)} = B^{(p)} + \varkappa \sqrt{\frac{q_r}{q_k}}\,(\cos\varphi + i \sin\varphi). \tag{82}$$

Damit ist ein komplexes $\overline{q}^{(p)}$ bei reellem $q^{(p)}$ aufgezeigt, was auf das Vorhandensein eines Instabilitätsbereichs hinweist: Wenn es gelingt, auch die weiteren $q^{(j)}$ $(j > p)$ als reelle Zahlen mit zugehörigen komplexen $\overline{q}^{(j)}$ anzugeben, so ist damit eine reelle Kurve q gefunden, die eindeutig im instabilen Gebiet liegt.

Wir erledigen die damit gestellte Aufgabe, indem wir sogleich noch einen Schritt weiter gehen und neben den Kurven im Instabilitätsbereich auch diejenigen Kurven aufsuchen, die den Bereich gegen das stabile Gebiet abgrenzen. Wir behaupten — und das soll nachher bewiesen werden — daß man die Koeffizienten $q_G^{(j)}$ der gesuchten Grenzkurven nach der folgenden Rechenvorschrift findet. Ein Index G an einem Formelzeichen soll dabei besagen, daß die betreffende Größe zu einer Grenzlinie gehört.

1) Für $j < p$ sind die $q_G^{(j)}$ gleich den aus (77) folgenden, von $c^{(\xi)}$ freien Koeffizienten $q^{(j)}$:

$$q_G^{(j)} = \frac{E^{(j)}}{2\, q_k\, p} \qquad \text{für } j < p\,.$$

2) Die Grenzwerte $c_G^{(j-p)}$ der Koeffizienten $c^{(j-p)}$ sind sukzessiv als Wurzeln der Gleichungen

$$\frac{\partial\, q^{(j)}}{\partial\, c^{(0)}} = 0 \qquad (j = p, p+1, \ldots) \tag{83}$$

zu berechnen. Man hat also zunächst aus (78) die Gleichung $\partial q^{(p)}/\partial c^{(0)} = 0$ zu bilden und nach $c^{(0)} = c_G^{(0)}$ aufzulösen. Da $E^{(p)}$ unabhängig von $c^{(0)}$ ist, folgt sofort

$$c_G^{(0)} = \pm \sqrt{\frac{q_r}{q_k}}\,. \tag{84}$$

Weiter liefert (83) unter Berücksichtigung von (84) für $j > p$

$$c_G^{(j-p)} = \mp \frac{1}{2\,\varkappa} \left(\frac{q_r}{q_k}\right)^{3/2} \frac{\partial\, E^{(j)}}{\partial\, c^{(0)}}\bigg|_G \qquad (j = p+1, p+2, \ldots). \tag{85}$$

3) Die Grenzwerte (84) und (85) sind in (78) und (79) einzuführen. Dann kommen als Ergebnis die weiteren Koeffizienten der Grenzkurven

$$\left.\begin{aligned} q_G^{(p)} &= \frac{E^{(p)}}{2\, q_k\, p} \pm \frac{\varkappa}{p \sqrt{q_k\, q_r}}\,, \\ q_G^{(j)} &= \frac{E_G^{(j)}}{2\, q_k\, p}\,(j > p)\,. \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Die Gleichungen (84) bis (86) sind als Rekursionsformeln zur Berechnung der $q_G^{(j)}$ zu betrachten. Wenn man in (84) und (86) einmal von dem oberen und einmal von dem unteren Vorzeichen ausgeht, gelangt man eindeutig zu zwei bestimmten Wertefolgen $q_G^{(p)}$, $q_G^{(p+1)}$, ..., die zwei bestimmte Kurven

$$q = q_G = 1 + \varepsilon\, q_G^{(1)} + \varepsilon^2\, q_G^{(2)} + \cdots$$

ergeben. Da die $c_G^{(j)}$ nach (84) und (85) reell sind, werden die zugehörigen $\overline{q}^{(j)} = \overline{q}_G^{(j)}$ gleichfalls reell. Die beiden Kurven q_G schließen ein Gebiet ein, von dem wir zu zeigen haben, daß in ihm Instabilität, außen aber Stabilität herrscht.

Um diesen Beweis zu führen, betrachten wir neben einer Kurve q_G eine weitere Kurve q, in deren Potenzentwicklung alle $q^{(j)}$ für $j \geqq p$ mit den festen Koeffizienten $q_G^{(j)}$ einer der obengenannten Kurven übereinstimmen, während $q^{(p)}$ veränderlich und durch (78) bzw. (81) gegeben sein soll. Wir geben nun $c^{(0)}$ zuerst einen reellen Wert $\neq c_G^{(0)}$ und den $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots$ die damit festliegenden, aus (79) folgenden Werte

$$c^{(j-p)} = \frac{2\, q_k\, p\, q_G^{(j)} - E^{(j)}}{\varkappa \left[\dfrac{q_k}{q_r} - \dfrac{1}{c^{(0)s}} \right]} \quad (j = p+1, p+2, \ldots)\,, \tag{87}$$

worin die Klammer im Nenner wegen $c^{(0)} \neq c_G^{(0)}$ nicht verschwindet. Die $c^{(j)}$ sind damit alle reell, d. h. die Kurve q liegt jetzt im Stabilitätsgebiet. Nun ist aber für reelle $c^{(0)}$

$$\left| \frac{q_k}{q_r}\, c^{(0)} + \frac{1}{c^{(0)}} \right| > \left| \frac{q_k}{q_r}\, c_G^{(0)} + \frac{1}{c_G^{(0)}} \right|.$$

Also liegt $q^{(p)}$ nach (78) außerhalb des von den beiden Grenzwerten $q_G^{(p)}$ eingeschlossenen $q^{(p)}$-Intervalles und damit die Kurve q außerhalb des Bereichs zwischen den beiden Kurven q_G (Abb. 3). Das Stabilitätsgebiet liegt also außen. Zweitens geben wir $c^{(0)}$ einen komplexen Wert $\neq c_G^{(0)}$ und den $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots$ wiederum die Werte (87). Da diese jetzt gleichfalls komplex werden, was dieselbe Eigenschaft für die $\overline{q}^{(j)}$ $(j \geqq p)$ nach sich zieht, fällt die Kurve q nunmehr in das Instabilitätsgebiet. Nach Gleichung (81), die für komplexe $c^{(0)}$ gilt, liegt $q^{(p)}$ innerhalb des laut (86) von den beiden Grenzwerten $q_G^{(p)}$ eingeschlossenen $q^{(p)}$-Intervalles und somit die Kurve q in dem Gebiet zwischen den beiden Grenzkurven q_G (Abb. 3), das sich somit als Instabilitätsgebiet herausgestellt hat. Lassen wir $c^{(0)} \longrightarrow c_G^{(0)}$ streben, wobei $c^{(0)}$ reell oder komplex sein kann, so geht (87) zunächst in die Form 0/0 über. Durch Differentiieren des Zählers und Nenners nach $c^{(0)}$ folgt aber aus (85) sofort

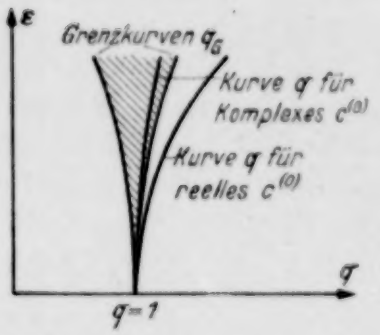

Abb. 3. Zur Herleitung der Instabilitätsbereiche.

$$\lim_{c^{(0)} \to c_G^{(0)}} c^{(j-p)} = c_G^{(j-p)} \qquad (j = p+1, p+2, \ldots)\,.$$

Mit $c^{(0)} \longrightarrow c_G^{(0)}$ schwenkt also die Kurve q von außen oder innen her stetig in eine der beiden oben bestimmten Kurven q_G ein. Diese Kurven stellen also in der Tat die Grenzlinien eines Instabilitätsbereichs dar.

Innerhalb der Instabilitätsbereiche, die damit in der (ω, ε)-Ebene über den Punkten $\omega_0 = (\omega_k + \omega_r)/p$ nachgewiesen sind, ist, wie schon mehrfach erwähnt, $\overline{q}$ und deshalb h_r komplex. Für die Stärke des Anwachsens der Lösung V_{fr} mit s ist der Betrag des Realteils von ϱ_r oder nach (49) und (56) des Imaginärteils von $h_r = \overline{q}/q$ maßgebend; dieser soll daher etwas näher betrachtet werden. Offenbar ist der Imaginärteil von $\overline{q}/q$ auf verschiedenen Kurven q im Instabilitätsbereich verschieden groß und geht mit stetig in eine Grenzkurve einschwenkender Kurve q stetig in Null über. Es muß eine bestimmte Kurve q geben, auf welcher $|J(\overline{q}/q)|$ ein Maximum hat. Man könnte diese Kurve und das zugehörige Maximum durch eine Extremalbetrachtung nach den Regeln der Differentialrechnung bestimmen, was allerdings ziemlich umständlich wäre. Einfacher ist es, auf diese genaue Rechnung zu verzichten und, was sicherlich nicht viel fehlgehen wird, die Annahme zu machen, daß das Maximum von $J(h_r)$ etwa auf der Mittellinie

des Instabilitätsbereichs, genauer gesagt in der Mitte der waagerechten, parallel zur q- bzw. ω-Achse geführten Schnitte, zu liegen kommt. Diese Mittellinie

$$q = 1 + \varepsilon\, q_M^{(1)} + \varepsilon^2\, q_M^{(2)} + \cdots ,$$

deren Koeffizienten $q_M^{(j)}$ für $j < p$ mit den Konstanten $q^{(j)} = q_G^{(j)}$ des Bereichs übereinstimmen und für $j \geqq p$ gleich der halben Summe der beiden Grenzwerte $q_G^{(j)}$ sind, ist als bekannt anzusehen, und die Aufgabe besteht jetzt darin, den Imaginärteil von $\overline{q}/q$ auf dieser Mittellinie anzugeben. Wir wollen dabei, wie es an den Koeffizienten $q_M^{(j)}$ schon geschehen ist, alle zur Mittellinie gehörigen Größen mit dem Index M versehen.

In der Entwicklung

$$\overline{q} = q_r + \varepsilon\, \overline{q}_M^{(1)} + \varepsilon^2\, \overline{q}_M^{(2)} + \cdots$$

sind die $\overline{q}_M^{(j)}$ für $j < p$ durch (68) gegeben und somit reell, weil unabhängig von den $c^{(\xi)}$. Nach (81) wird $q^{(p)} = q_M^{(p)}$ für $\cos\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$. Derselbe Wert φ liefert nach (82)

$$\overline{q}_M^{(p)} = \frac{B^{(p)}}{2\, q_r} + i\, \frac{\varkappa}{2\sqrt{q_k\, q_r}}$$

und nach (80)

$$c_M^{(0)} = i \sqrt{\frac{q_r}{q_k}} .$$

Die weiteren Zahlen $c_M^{(1)}$, $c_M^{(2)}$, ... folgen aus (79) zu

$$c_M^{(j-p)} = \frac{2\, q_k\, p\, q_M^{(j)} - E_M^{(j)}}{2\, \varkappa\, q_k / q_r} \qquad (j = p+1, p+2, \ldots) .$$

Sie werden komplex, da $E^{(j)}$ von $j = p+1$ ab von $c^{(0)}$ abhängt, und ergeben in (70) eingesetzt

$$\overline{q}_M^{(j)} = \frac{B_M^{(j)}}{2\, q_r} + \frac{\varkappa}{2\, q_r}\, c_M^{(j-p)} .$$

Damit ist der gesuchte Imaginärteil von h_r auf der Mittellinie

$$J(h_r)_M = \frac{\dfrac{\varkappa}{2\sqrt{q_k\, q_r}}\, \varepsilon^p + J(\overline{q}_M^{(p+1)})\, \varepsilon^{p+1} + \cdots}{1 + \varepsilon\, q_M^{(1)} + \varepsilon^2\, q_M^{(2)} + \cdots} \tag{88}$$

bekannt. Man kann noch einen Schritt weiter gehen und den Quotienten (88) durch Ausführung der Division in eine Potenzreihe verwandeln und erhält die Entwicklung

$$J(h_r)_M = \frac{\varkappa}{2\sqrt{q_k\, q_r}}\, \varepsilon^p + \cdots , \tag{89}$$

von der aber die folgenden Glieder nicht angegeben werden sollen.

Selbstverständlich läßt sich auch auf jeder anderen vorgegebenen Kurve q im Instabilitätsbereich eine Potenzentwicklung von $\overline{q}$ und $J(h_r)$ aufstellen, deren Ableitung ganz entsprechend der für die Mittellinie gegebenen verläuft. Es wird dann allgemein

$$J(h_r) = \frac{\varkappa \sin\varphi}{2\sqrt{q_k\, q_r}}\, \varepsilon^p + \cdots$$

mit beliebigem φ. Daraus geht hervor, daß das erste Glied der Entwicklung von $J(h_r)$ seinen Maximalbetrag $|\varkappa/2\sqrt{q_k\, q_r}|\, \varepsilon^p$ genau auf der Mittellinie annimmt.

Die Entwicklungen der vorliegenden Ziff. **10** setzten $\varkappa \neq 0$ voraus. Es ist mehrmals mit $\varkappa$ dividiert worden. Sollte in Sonderfällen $\varkappa = 0$ werden, so treten, wie hier nur beiläufig erwähnt sei, in der Ableitung der ausgezeichneten Koeffizientenfolgen $q_G^{(j)}$, $\overline{q}_M^{(j)}$ Änderungen ein. Wir wollen hier, wo es sich um die Darstellung des allgemeinsten Falles handeln soll, derartige Einzelfälle, die immer nur in Sonderproblemen auftreten können, nicht ausführlich verfolgen. Es sei lediglich mit wenigen Strichen skizziert, in welcher Richtung die Änderungen gehen. Für $\varkappa = 0$ sind nach (69) und (78) und dem am Schluß von Ziff. **9** über die $B^{(j)}$ und $E^{(j)}$ Gesagten $q^{(p)}$ und $\overline{q}^{(p)}$ konstant, d. h. unabhängig von allen $c^{(\xi)}$. Dies bedeutet, daß die beiden Grenzkurven $q_G(\varepsilon)$ des Instabilitätsbereichs nicht nur wie bisher gleiche $q_G^{(j)}$ mit $j < p$ haben, sondern auch noch gleiche $q_G^{(p)}$, ferner daß $\overline{q}^{(p)}$ noch keinen von Null verschiedenen Imaginärteil hat. Zwei nicht

gleiche Grenzwerte $q_C^{(p')}$ und einen Imaginärteil von $\overline{q}^{(p')}$ kann man erst für dasjenige $p' > p$ erwarten, welches in (70) zum erstenmal ein lineares Glied mit $c^{(0)}$ und in (73) ein von $c^{(0)}$ freies Glied anzeigt. Der Koeffizient $c^{(1)}$ tritt dann in (70) und (79) nicht schon für $j = p+1$ auf, sondern erst für $j = p'+1$, ebenso der Koeffizient $c^{(2)}$ eine Gleichung später usw., aber immer linear. Der Aufbau der Hauptgleichungen bleibt auch in derartigen Sonderfällen grundsätzlich erhalten, nur ist der ausgezeichnete Index j nicht mehr gleich p, sondern gleich $p' > p$. Die Aufgabe besteht dann darin, die Hauptgleichungen dem gegebenen Sonderfall entsprechend im einzelnen zu präzisieren, vor allen Dingen festzustellen, welche Größen nun in (70) und (79) für $j = p'$ an die Stelle des in (69) und (78) ausgefallenen $\varkappa$ treten. Dann läßt sich an die Hauptgleichungen des Sonderfalls eine ebensolche Theorie zur Bestimmung der Grenzlinien der Instabilitätsbereiche und der Extremwerte der charakteristischen Exponenten anschließen, wie das oben im allgemeinen Fall geschehen ist. Die Einzeldiskussion ist allerdings nicht ohne vorherige Kenntnis der speziellen Bedingungen durchzuführen.

11. Zusammenstellung und Diskussion der Ergebnisse. Die mechanische Bedeutung der Ableitungen des Abschnitts III ist in der bisherigen Darstellung nicht ganz leicht zu übersehen. Deshalb sollen die wichtigsten Ergebnisse hier besonders herausgestellt und mit einigen Ergänzungen versehen werden.

Wir knüpfen an die Tatsache an, daß die Zusatzverschiebungen $\overline{u}_i$ des elastischen Körpers nach (12) als Summen von Produkten der Eigenschwingungsformen u_{if}^* mit den zunächst unbekannten Zeitfunktionen v_f angesetzt sind. Für die Bestimmung der v_f steht ein System von N linearen Differentialgleichungen (11) mit periodischen Koeffizienten zur Verfügung, dessen Lösungen den zeitlichen Verlauf der Nachbarbewegungen und somit die Stabilitätseigenschaften der Grundbewegung des elastischen Körpers wiedergeben. Das Differentialgleichungssystem (11), das in der allgemeinen Theorie als ein geschlossenes System erscheint, kann in Sonderfällen in mehrere Teilsysteme (32) mit n Gleichungen zerfallen. Darunter können auch Gleichungen ohne periodische Koeffizienten vorkommen, nämlich dann, wenn die zugehörigen Verschiebungsanteile an den Grundspannungen eine Arbeit leisten, die keinen quadratischen Teil A_{zus} besitzt (Ziff. 4). Derartige Gleichungen sollen allerdings als belanglos für die Stabilitätsfrage außerhalb der Betrachtung bleiben.

Die Zeitfunktionen $v_f\,(f = 1, 2, \ldots n)$ sind nun als allgemeine Lösung von (32) aufzufassen und setzen sich als solche linear aus dem Fundamentalsystem der $2n$ partikulären Integrale V_{fr}, V_{fr}^* zusammen. Diese Integrale haben, wie in Abschnitt II erörtert wurde, im Normalfall die Form (42), (44), in Sonderfällen, die als Grenzfälle unwichtig sind, eine ausgeartete Form mit Säkulargliedern. Der Sinn der Reihenentwicklungen des Abschnitts III ist der, in der Koordinatenebene der mechanisch maßgebenden Gleichungsparameter ω, ε diejenigen Gebiete aufzusuchen, in denen ein Partikulärlösungssystem V_{fr}, $V_{fr}^*\,(f = 1, 2, \ldots n)$ mit bestimmter Nummer r (aus den Zahlen $1, 2, \ldots n$) instabil wird, weil der charakteristische Exponent ϱ_r einen nicht verschwindenden Realteil bekommt, sowie innerhalb dieser Gebiete den genannten Realteil wirklich zu berechnen. Wir haben also keineswegs die Berechnung des vollständigen Fundamentalsystems für bestimmte Parameterwerte ω, ε durchgeführt oder auch nur angestrebt, sondern haben lediglich die einzelnen Partikularlösungen soweit studiert, als es zur Klärung ihres stabilen bzw. instabilen Verhaltens in der (ω, ε)-Ebene erforderlich war.

Über die Form der zu der Lösung V_{fr}, V_{fr}^* gehörigen Instabilitätsbereiche und über den charakteristischen Exponenten ϱ_r lassen sich einige allgemeine Aussagen machen (vgl. dazu die schematische Skizze Abb. 4):

1) Die Fußpunkte der Instabilitätsbereiche auf der ω-Achse haben die Abszissen

$$\omega_0 = \frac{\omega_r + \omega_k}{p} \qquad (p > 0, \text{ ganz}), \tag{90}$$

wobei k neben dem jetzt herausgehobenen r eine beliebige Zahl von 1 bis n (einschließlich r) ist.

2) Die Grenzlinien der Instabilitätsbereiche lassen sich durch Gleichungen der Form

$$\omega_G = \omega_0 + \varepsilon\,\omega_G^{(1)} + \varepsilon^2 \omega_G^{(2)} + \cdots \tag{91}$$

darstellen. Sie folgen nach (56) aus der in Ziff. 10 gewonnenen Entwicklung $q_G = 1 + \varepsilon\, q_G^{(1)} + \varepsilon^2 q_G^{(2)} + \cdots$ durch Multiplikation aller Glieder mit ω_0. Jeder Bereich hat zwei Grenzlinien (91).

3) Für $p=1$ sind[1] die zu den beiden Grenzlinien gehörigen Koeffizienten $\omega_G^{(1)}$, d.h. die Steigungen dieser Linien für $\varepsilon=0$, nach (76) und (86)

$$\omega_G^{(1)} = \pm \frac{F_{rk}^{(0)}}{2\sqrt{\omega_r \omega_k}}.$$

Die Grenzkurven münden also für $p=1$ von links und rechts oben her unter zwei endlichen gleichen Winkeln gegen die Lotrechte in den Fußpunkt $\omega_0=\omega_r+\omega_k$ ein.

4) Für $p>1$ ist $\omega_G^{(1)}=0$; beide Grenzkurven treffen senkrecht auf die ω-Achse auf. Ferner sind die $\omega_G^{(j)}$ beider Grenzlinien bis $j=p-1$ einander gleich, d.h. es liegt eine Berührung $(p-1)$-ter Ordnung der zwei Kurven vor. Die beiden $\omega_G^{(p)}$ dagegen unterscheiden sich nach (86) um die Größe $2\,\omega_0^2 \varkappa/p\sqrt{\omega_r \omega_k}$, wobei nach (74) oder (75)

$$\omega_0^2 \varkappa = \frac{1}{2^p} \sum_{r_1, \cdots, r_{p-1}=1}^{n} \frac{F_{r r_1}^{(0)} F_{r_1 r_2}^{(0)} \cdots F_{r_{p-2} r_{p-1}}^{(0)} F_{r_{p-1} k}^{(0)}}{\prod_{m=1}^{p-1} [(\omega_r - m\,\omega_0)^2 - \omega^2{}_{r_m}]}$$

ist.

5) Der charakteristische Exponent ϱ_r läßt sich gleichfalls in eine Reihe

$$\varrho_r = \varrho_r^{(0)} + \varepsilon \varrho_r^{(1)} + \varepsilon^2 \varrho_r^{(2)} + \cdots$$

entwickeln. Er wird außerhalb der Instabilitätsgebiete rein imaginär. Innerhalb der Instabilitätsbereiche bekommt ϱ_r einen Realteil, dessen Betrag ein Maß für die Stärke des Anwachsens der Lösung V_{fr} bzw. V_{fr}^* ist, und der gegen Null geht, wenn sich der Punkt mit den Koordinaten ω, ε dem Rand eines Bereichs nähert. Der Exponent $\varrho_r^{(0)}$ ist nach (52) stets imaginär. Für $p=1$ hat schon $\varrho_r^{(1)}$ einen Realteil, und zwar hat dieser nach (89), (64) das Maximum

$$|\Re(\varrho_r^{(1)})|_{\max} = \frac{|F_{rk}^{(0)}|}{4\,\omega_0\sqrt{\omega_k \omega_r}}.$$

Für $p>1$ sind die $\varrho_r^{(j)}$ bis $j=p-1$ rein imaginär und erst in $\varrho_r^{(p)}$ tritt ein Realteil auf mit dem Maximum [vgl. (89)]

$$|\Re(\varrho_r^{(p)})|_{\max} = \frac{\omega_0}{2\sqrt{\omega_k \omega_r}} |\varkappa|.$$

Bemerkenswert ist, daß der Unterschied zwischen den Instabilitätsbereichen erster und zweiter Art (Ziff. 7) in den Aussagen 1) bis 5) gar nicht hervortritt.

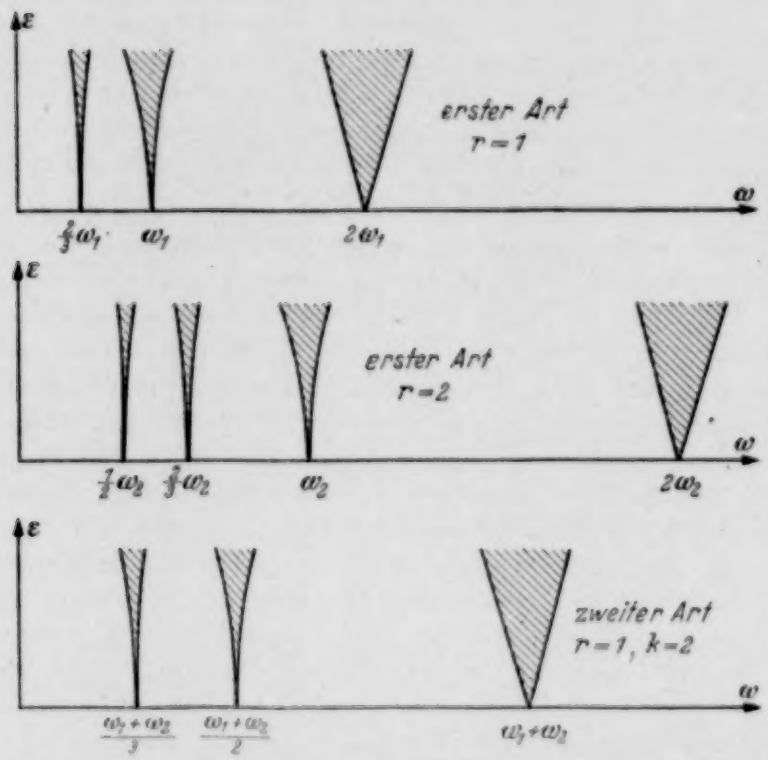

Abb. 4. Schematische Darstellung der ersten Instabilitätsbereiche, die den beiden ersten Eigenfrequenzen zugeordnet sind; die drei Diagramme sind übereinander gezeichnet zu denken.

Die Instabilitätsgebiete für die verschiedenen Partikularlösungssysteme V_{fr}, V_{fr}^* $(r=1,2,\ldots n)$, die wir uns zunächst für jedes r auf ein besonderes Blatt gezeichnet gedacht haben (Abb. 4), müssen nun alle übereinandergelegt und gleichzeitig betrachtet werden, da ja in der allgemeinen Lösung von (32) alle Partikularlösungen gleichberechtigt vertreten sind. Die derart in verschiedene Bereiche eingeteilte (ω, ε)-Ebene stellt das gesuchte Stabilitätsdiagramm dar und läßt das Verhalten der elastischen Grundbewegung unmittelbar ablesen: alle Parameterwerte ω, ε, deren Diagrammpunkte in keinem Instabilitätsbereich liegen, führen auf Stabilität, alle anderen auf Labilität der erzwungenen Schwingung.

[1] Wir drücken jetzt die Ergebnisse in den Koeffizienten der ursprünglichen Gleichungen (32) bzw. (11) aus.

Unter den mannigfachen auf diese Weise in dem Diagramm verzeichneten Instabilitätsbereichen fallen selbstverständlich diejenigen mit den Fußpunkten $\omega_0=(\omega_r+\omega_k)/p$, die zu dem Partikularsystem V_{fr}, V_{fr}^* gehören, zusammen mit denjenigen, welche dieselben Fußpunkte $\omega_0=(\omega_k+\omega_r)/p$ haben und die Instabilität des Partikularsystems V_{fk}, V_{fk}^* anzeigen. Es handelt sich ja, wie aus Abschnitt II hervorgeht, um diejenigen Gebiete der (ω, ε)-Ebene, in denen die zu V_{fr} gehörende Wurzel z_r und die zu V_{fk} gehörende Wurzel z_k der charakteristischen Gleichung (46) konjugiert komplex sind. Es kann aber darüber hinaus der Fall eintreten, daß die Fußpunkte von weiteren Bereichen auf der ω-Achse zusammentreffen. Das hängt eng mit dem Verbot von (64) bzw. (66) zusammen. Die Gleichung (66) ist nämlich, wie man sofort nachprüft, erfüllt, wenn auf einen der bisher betrachteten Fußpunkte (90) der Fußpunkt eines zweiten Instabilitätsbereichs mit $\omega_0=(\omega_r+\omega_f)/(-\eta)$ $(f\neq k,\ \eta<0)$ fällt, ferner speziell für den Fall $r=k$ auch dann, wenn der Fußpunkt $\omega_0=(2/p)\omega_r$ mit einem anderen Fußpunkt $\omega_0=[2/(2\eta+p)]\omega_f$ $(f\neq r,\ 2\eta+p>0)$ zusammentrifft. Derartige Übereinstimmungen sind also verboten. Außerdem dürfen die Fußpunkte (90) auch nicht auf die Punkte $\omega_0=(\omega_r-\omega_f)/(-\eta)$ $(\eta\gtrless 0)$ fallen, von denen zwar keiner der angegebenen Instabilitätsbereiche ausgeht, die aber aus rechnerischen Gründen zu meiden sind.

Diese Einschränkungen mußten getroffen werden, um die Durchführbarkeit unserer Rechnungen in der gegebenen allgemeinen Form sicherzustellen. In den Einzelproblemen der Elastokinetik wird man sich aus praktischen Gründen auf Ansätze mit verhältnismäßig kleiner Gliederzahl, also auf wenige Gleichungen (32) mit den niedrigsten Eigenfrequenzen ω_f und auf kleine p beschränken müssen. Damit kommt man auf nur wenige Instabilitätsbereiche niedriger „Ordnung" p, für welche die ausgesprochenen Verbote keine allzu starke Beschränkung bedeuten. Geht man aber zu immer größeren n, also zu höheren Eigenfrequenzen, und gleichzeitig zu größeren p über, so findet man in der Nähe der erwähnten Bereiche niedriger Ordnung eine große Anzahl von Fußpunkten (90) und von zugehörigen Instabilitätsbereichen hoher Ordnung p, die wegen der $(p-1)$-fachen Berührung ihrer Grenzkurven sehr schmal sind und deren charakteristische Exponenten einen mit ε^p multiplizierten, also sehr kleinen Realteil haben. Mechanisch ist mit Sicherheit anzunehmen, daß diese ganz schwachen Instabilitäten durch die hier nicht berücksichtigte, aber in Wirklichkeit stets vorhandene Dämpfung verwischt werden, denn anschaulich gesprochen wird sich die theoretisch geforderte langsame Aufschaukelung gegen das von der Dämpfung bewirkte Abklingen der Nachbarbewegungen aus Stetigkeitsgründen nicht durchsetzen können. Mathematisch aber tritt die Frage auf, was geschieht, wenn n bzw. N über alle Grenzen wächst, also die Frage nach der Konvergenz des Verfahrens.

Das Konvergenzproblem soll allerdings im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt werden; schon in der Einleitung wurde ja angekündigt, daß es sich hier um die Angabe eines Näherungsweges zur zahlenmäßigen Lösung des Stabilitätsproblems handeln soll. Dieser Näherungsweg gründet sich auf formale Reihenentwicklungen, nämlich auf den Ansatz (6) bzw. (12), der für $N\to\infty$ in Wahrheit ein Reihenansatz ist, und auf die Potenzentwicklung nach ε der Koeffizienten von (12). Der in der Mechanik Erfahrene weiß aber, daß für praktische Rechnungen häufig genug Reihen verwendet werden, deren Konvergenzverhalten unbekannt ist, und daß für die Abschätzung der erzielten Genauigkeit ein strenger Konvergenzbeweis viel weniger wichtig ist als etwa die Beurteilung der Größenordnung der Reihenglieder, der Vergleich mit streng lösbaren Sonderfällen und ähnliche Mittel. Im übrigen wird das Konvergenzverhalten unsrer Reihen sowohl in theoretischer als auch in praktisch-numerischer Hinsicht sehr von der Größe der nach (63) in den Gliednennern vorkommenden Faktoren $(q_r+\eta)^2-q_f^2$ abhängen. Das exakte Verschwinden eines Nenners ist durch die Erfüllung der Hauptgleichungen (67) und das Verbot von (64) für alle andern als die in (65) angegebenen Ziffern zwar ausgeschlossen. Aber für die Konvergenz und die numerische Brauchbarkeit der Reihen ist es wichtig, daß $(q_r+\eta)^2-q_f^2$ auch nicht sehr klein wird, da man sonst große Beträge der entsprechenden Reihenglieder zu erwarten hätte, was besonders unangenehm wäre, wenn es sich um hohe Glieder (mit großem η oder großem f) handelte. Man wünscht ja die Rechnung auf wenige Glieder zu beschränken. Eine nähere Diskussion dieser Fragen soll hier, wie gesagt, unterbleiben. Erwähnt mag noch werden, daß unser Verfahren der Entwicklung der Lösungen von (32) nach Potenzen von ε letzten Endes mit der hauptsächlich in der Himmelsmechanik verwendeten Störungstheorie identisch ist, und daß dort ähnliche Teiler in den Gliednennern auftreten wie hier. Diese Verwandtschaft läßt es sogar als möglich erscheinen, daß unsere Reihen semikonvergent sind[1].

[1] Vgl. *R. Grammel* in Handbuch d. Physik, herausgeg. v. *H. Geiger* u. *K. Scheel*, Bd. V, S. 358 ff. Berlin 1927.

Unsere bisherigen Aussagen über das Stabilitätsverhalten des elastischen Körpers sollen noch durch einen Zusatz mechanischer Art ergänzt werden. Zunächst sei nochmal wiederholt, daß der Grundbewegungszustand, d. h. die erzwungene Schwingung, für solche Erregerfrequenzen instabil wird, die in der Nähe der ausgezeichneten Werte (90) liegen. Für $r=k$, $\omega_0=(2/p)\omega_r$ besagt dies, daß die erregende Frequenz ω in die Nähe der doppelten Eigenfrequenzen und ganzzahliger Teile davon fallen muß, damit Instabilität entsteht. Diese Erscheinung hat sich bei allen bisher im Schrifttum behandelten Einzelproblemen der Stabilität elastischer Schwingungen gezeigt und nunmehr allgemein bestätigt. Wir sprechen hier von Instabilitätsbereichen erster Art. Neu ist aber die Tatsache, daß auch dann Instabilität auftreten kann, wenn die erregende Frequenz ω in die Nähe der Werte $\omega_0=(\omega_r+\omega_k)/p$ mit $r\neq k$ kommt, also ganzzahliger Teilbeträge der doppelten Schwebungsfrequenz zwischen der r-ten und der k-ten Eigenschwingung des elastischen Körpers. Derartige Instabilitätsbereiche haben wir als solche zweiter Art bezeichnet. Sie kommen bei denjenigen Einzelproblemen nicht vor, in denen synchrone Nachbarbewegungen aller Teile des Körpers möglich sind mit einer Schwingungsform gleich einer beliebigen Eigenschwingungsform. In diesen Fällen zerlegt sich das Gleichungssystem (11) in eine Folge von unabhängigen *Mathieu*schen Gleichungen, die bekanntlich nur Instabilitätsbereiche erster Art liefern (Beispiel: Der beiderseits gelenkig gelagerte, axial pulsierende belastete Stab). Im allgemeinen Fall dagegen sind die Gleichungen (11) mindestens zum Teil miteinander gekoppelt und führen dann auf die genannten Instabilitäten für die Schwebungsfrequenzen[1].

Zum Schluß dieses Abschnitts noch eine Bemerkung: Wer das verhältnismäßig komplizierte Verfahren verfolgt, das uns in Ziff. 7 bis 10 zur Abgrenzung der Instabilitätsbereiche geführt hat, wird sich vielleicht an die elegante Methode erinnern, mit der man in der Theorie der *Mathieu*gleichung die Instabilitätsbereiche durch Berechnung der periodischen Lösungen festlegt[2], und wird sich fragen, ob diese Methode nicht auch in unserem allgemeinen Fall zu einfacheren Entwicklungen führen würde. Dies wäre in der Tat so, wenn wir uns nur mit den Grenzen der Instabilitätsbereiche erster Art beschäftigen wollten. Auf die Bereiche zweiter Art läßt sich die Methode aber schon nicht mehr übertragen. Auch die Berechnung der charakteristischen Exponenten leistet sie nicht. Wir haben es deshalb vorgezogen, hier das gegebene zwar kompliziertere, aber umfassende Verfahren allein zu entwickeln.

12. Fortführung des Beispiels. Die in Ziff. 4 begonnene Behandlung eines Beispiels soll nun soweit fortgesetzt werden, daß die Konvergenz und zahlenmäßige Brauchbarkeit des im vorliegenden Abschnitt entwickelten Verfahrens wenigstens in einem Einzelfall deutlich wird[3]. Für die numerische Durchführung brauchen wir zunächst bestimmte Zahlenannahmen und wählen dazu die Werte (vgl. Abb. 1) $l=100$ cm, $h=10$ cm, $b=1$ cm, ferner die Materialkonstanten für Stahl $E=2{,}1\cdot10^6$ kg/cm², $G=0{,}81\cdot10^6$ kg/cm², $\mu=0{,}800\cdot10^{-4}$ kg sec²/cm⁴.

Damit ergibt sich[4]

$$J_y=0{,}8333\text{ cm}^4,\qquad i_p=2{,}901\text{ cm},$$
$$J_z=83{,}33\text{ cm}^4,\qquad \omega_{1y}=1{,}460\cdot10^3\text{ sec}^{-1},$$
$$J_d=3{,}130\text{ cm}^4,\qquad \omega_{3y}=1{,}314\cdot10^4\text{ sec}^{-1},$$
$$M_{\text{kipp}}=66170\text{ cm kg}.$$

Wir nehmen ferner den Ansatz (24) dreigliedrig ($n=6$) und setzen außerdem $\lambda M_0=\frac{1}{2}M_{\text{kipp}}$ fest. Dann folgen durch einfache Zahlenrechnung aus (28) die Eigenfrequenzen

$$\omega_1=1{,}263\cdot10^2\text{ sec}^{-1},\qquad \omega_4=5{,}788\cdot10^3\text{ sec}^{-1},$$
$$\omega_2=1{,}929\cdot10^3\text{ sec}^{-1},\qquad \omega_5=3{,}645\cdot10^3\text{ sec}^{-1},$$
$$\omega_3=1{,}294\cdot10^3\text{ sec}^{-1},\qquad \omega_6=9{,}639\cdot10^3\text{ sec}^{-1}$$

---

[1] Die zwei bis jetzt im Schrifttum vorhandenen Arbeiten von *S. Woinowsky-Krieger*, Ing.-Arch. 13 (1942), S. 197 und *K. Kejwal*, Diss. Hannover 1947, die sich über die *Mathieu*sche Gleichung hinausgehend mit gekoppelten Gleichungen beschäftigen, haben beide diesen Sachverhalt nicht klargestellt.

[2] Z. B. *S. Woinowsky-Krieger*, Ing.-Arch. 13 (1942), S. 90.

[3] Bei der Rechenarbeit hat mich Herr *F. Weidenhammer* wirksam unterstützt.

[4] J_d nach *C. Weber*, Die Lehre von der Verdrehungsfestigkeit. Berlin 1921.

und aus (27) die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} w_1 &= 0{,}9994\, v_1 + 0{,}03800\, v_2, \\ w_2 &= -0{,}03800\, v_1 + 0{,}9994\, v_2, \\ w_3 &= 0{,}9992\, v_3 + 0{,}03982\, v_4, \\ w_4 &= -0{,}03982\, v_3 + 0{,}9992\, v_4, \\ w_5 &= 0{,}9990\, v_5 + 0{,}04406\, v_6, \\ w_6 &= -0{,}04406\, v_5 + 0{,}9990\, v_6. \end{aligned}$$

Wir wollen ferner – und das ist der wesentlichste Punkt der Zahlenannahmen – der weiteren Rechnung den Wert

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 = 2{,}055 \cdot 10^3 \text{ sec}^{-1}$$

zugrunde legen, also den ersten Instabilitätsbereich zweiter Art untersuchen. Da dann ω stets in der Nähe von ω_0 bleiben wird, so kann man für $\bar{A}_{zus}$ eine Näherung einführen: es ist

$$\left(\frac{\omega}{\omega_{ky}}\right)^2 \ll 1, \quad \text{also} \quad 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{ky}}\right)^2 \approx 1 \quad \text{für } k \geqq 3.$$

Ferner gilt auf Grund von (30)

$$\sum_{k=3}^{\infty\prime} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi x}{l} = \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Also kommt

$$\sum_{k=1}^{\infty\prime} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l}}{k\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{ky}}\right)^2\right]} = \left(\frac{\pi}{4} + \beta(\omega) \sin \frac{\pi x}{l}\right) \tag{92}$$

mit der Abkürzung

$$\beta(\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{1y}}\right)^2} - 1.$$

Um die Genauigkeit dieser Näherung zu überprüfen, nehmen wir $1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{ky}}\right)^2 \approx 1$ erst von $k = 5$ an. Dann müssen wir

$$\sum_{k=5}^{\infty\prime} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi x}{l} = \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{l}$$

setzen und erhalten nach kurzer Zahlenrechnung als Faktor des rechts in (92) weggelassenen Gliedes $\sin 3\pi x/l$ für $\omega = \omega_0$ den Wert 0,008. Die Kleinheit dieser Zahl dürfte die Vernachlässigung des Gliedes $\sin 3\pi x/l$ und aller höheren Glieder rechtfertigen.

Aus (92) und (29) ergibt sich nun durch eine elementare Integration der mit $\varepsilon \cos \omega t$ multiplizierte Anteil von $\bar{A}_{zus}$ zu

$$\begin{aligned} \bar{A}_{zus} = {} & \frac{\pi^2 \varepsilon M_1}{2l} \cos \omega t \,(w_1 w_2 + 9 w_3 w_4 + 25 w_5 w_6) + \\ & + \frac{16 \beta \varepsilon M_1}{l} \cos \omega t \left(\frac{1}{3} w_1 w_2 - \frac{1}{3 \cdot 5} w_1 w_4 - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} w_1 w_6 - \frac{9}{3 \cdot 5} w_3 w_2 + \right. \\ & \left. + \frac{9 \cdot 9}{5 \cdot 7} w_3 w_4 - \frac{9 \cdot 5}{7 \cdot 9} w_3 w_6 - \frac{25}{3 \cdot 5 \cdot 7} w_5 w_2 - \frac{25 \cdot 5}{7 \cdot 9} w_5 w_4 + \frac{25 \cdot 25}{9 \cdot 11} w_5 w_6\right). \end{aligned}$$

In diesen Ausdruck sind die Transformationsformeln einzusetzen. Dabei wollen wir noch, um zu bestimmten Zahlwerten zu gelangen, festsetzen, daß das Moment M_1, dessen Größe ja bisher ganz frei blieb, gleich dem Kippmoment M_{kipp} ist, so daß also ε das Verhältnis der Amplitude des tatsächlich auftretenden pulsierenden Moments zum statischen Kippmoment darstellt. Dann folgen aus $\bar{A}_{zus}$ die Koeffizienten F_{fm} von (32). Sie gehen in die Koeffizienten $G_{fm}^{(0)}$ von (58) über, wenn man sie mit ω_0^2 dividiert und $\omega = \omega_0$ setzt. Ferner gewinnt man entsprechend nach (55) und (57) die *Taylor*koeffizienten $G_{fm}^{(1)}$, $G_{fm}^{(2)}$ durch Differentiieren von $\beta(\omega)$, und schließlich folgen die Zahlen q_f nach (56) durch Dividieren der ω_f mit ω_0. So ergibt sich die folgende Tabelle der Koeffizienten der Differentialgleichungen (58), soweit wir sie für die Rechnung brauchen. Dabei ist von vornherein festgesetzt, daß die Entwicklungen bis zur Potenz ε^3 getrieben werden sollen.

Tabelle der $G^{(0)}_{fm}$.

Wegen $G^{(0)}_{fm} = G^{(0)}_{mf}$ braucht die Tabelle nur zur Hälfte ausgefüllt zu werden.

m \ f	1	2	3	4	5	6
1	$0{,}5971 \cdot 10^{-2}$					
2	$-7{,}840 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}5971 \cdot 10^{-2}$				
3	$-1{,}108 \cdot 10^{-2}$	$26{,}10 \cdot 10^{-2}$	$0{,}3253 \cdot 10^{-1}$			
4	$2{,}861 \cdot 10^{-2}$	$1{,}150 \cdot 10^{-2}$	$-4{,}075 \cdot 10^{-1}$	$-0{,}3253 \cdot 10^{-1}$		
5	$-0{,}4121 \cdot 10^{-2}$	$10{,}36 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}4809 \cdot 10^{-1}$	$8{,}623 \cdot 10^{-1}$	$0{,}9554 \cdot 10^{-1}$	
6	$0{,}3969 \cdot 10^{-2}$	$0{,}4725 \cdot 10^{-2}$	$3{,}091 \cdot 10^{-1}$	$0{,}5043 \cdot 10^{-1}$	$-10{,}81 \cdot 10^{-1}$	$-0{,}9554 \cdot 10^{-1}$

Tabelle der $G^{(1)}_{fm}$.

m \ f	1	2
1	$-0{,}2244 \cdot 10^{-1}$	$2{,}947 \cdot 10^{-1}$
2	$2{,}947 \cdot 10^{-1}$	$0{,}2244 \cdot 10^{-1}$
3	$0{,}2255 \cdot 10^{-1}$	$-5{,}310 \cdot 10^{-1}$
4	$-0{,}5821 \cdot 10^{-1}$	$-0{,}2341 \cdot 10^{-1}$
5	$0{,}08385 \cdot 10^{-1}$	$-2{,}107 \cdot 10^{-1}$
6	$-0{,}08076 \cdot 10^{-1}$	$-0{,}09615 \cdot 10^{-1}$

$G^{(2)}_{12} = -1{,}042$

$q_1 = 0{,}06145$

$q_2 = 0{,}9386$

$q_3 = 0{,}6297$

$q_4 = 2{,}816$

$q_5 = 1{,}734$

$q_6 = 4{,}690$

Mit diesen Werten kann man sogleich an die Aufstellung der Hauptgleichungen gehen. Beachtet man, daß die ausgezeichneten Indizes jetzt $k=1$, $r=2$, $p=1$ sind und daß (60) $q_1+q_2=1$ lautet, so hat man nach (63) für $j=1$ die erste Hauptgleichung $K^{(1)}_{220}=0$ in der Form (69)

$$2\,q_2\,\overline{q}^{(1)} = \frac{1}{2}\,G^{(0)}_{21}\,c^{(0)} \qquad \left[\varkappa = \frac{1}{2}\,G^{(0)}_{21}\right]$$

und die zweite Hauptgleichung $K^{(1)}_{12,-1}=0$ in der Form (72)

$$-2\,q_1\,(\overline{q}^{(1)} - q^{(1)})\,c^{(0)} = \frac{1}{2}\,G^{(0)}_{12}\,,$$

für $j=2$ die erste Hauptgleichung $K^{(2)}_{220}=0$ in der Form (70)

$$2\,q_2\,\overline{q}^{(2)} = -\,\overline{q}^{(1)2} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{6} G^{(0)}_{2m}\,(c^{(1)}_{m2,-1} + c^{(1)}_{m21}) + \frac{q^{(1)}}{2}\,G^{(1)}_{21}\,c^{(0)}$$

und die zweite Hauptgleichung $K^{(2)}_{12,-1}=0$ in der Form (73)

$$2\,q_1\,(\overline{q}^{(2)} - q^{(2)})\,c^{(0)} = -\,(\overline{q}^{(1)} - q^{(1)})^2\,c^{(0)} + 2\,q_1\,(\overline{q}^{(1)} - q^{(1)})\,c^{(1)} + \\ + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{6} G^{(0)}_{1m}\,(c^{(1)}_{m2,-2} + c^{(1)}_{m20}) + \frac{q^{(1)}}{2}\,G^{(1)}_{12}\,.$$

Darin ist

$$c^{(1)}_{m2\eta} = \frac{1}{(q_2+\eta)^2 - q_m{}^2} \begin{cases} \text{mal } \frac{1}{2}\,G^{(0)}_{m2} & \text{für } \eta = \pm 1 \\ \text{mal } \frac{1}{2}\,G^{(0)}_{m1}\,c^{(0)} & \text{für } \eta = 0,\,-2 \end{cases} \quad (m = 1, 2, \ldots 6)$$

und speziell $c^{(1)}_{12,-1} = c^{(1)}$, $c^{(1)}_{220} = 0$.

Da wir bis $j=3$ gehen wollen, müssen die Hauptgleichungen für $j=1, 2$ so ausführlich ausgerechnet werden, daß die $q^{(j)}$ und $\overline{q}^{(j)}$ in ihrer Abhängigkeit von $c^{(0)}$ und $c^{(1)}$ erscheinen. Durch Einsetzen der Tabellenwerte und Isolieren der $q^{(j)}$, $\overline{q}^{(j)}$ erhält man

$$\bar{q}^{(1)} = -2{,}088 \cdot 10^{-2}\, c^{(0)}\,,$$

$$q^{(1)} = -\left[2{,}088\, c^{(0)} + 31{,}90\, \frac{1}{c^{(0)}}\right] \cdot 10^{-2}\,,$$

$$\bar{q}^{(2)} = -\left[0{,}1872\, c^{(0)^2} + 2{,}088\, c^{(1)} + 4{,}382\right] \cdot 10^{-2}\,,$$

$$q^{(2)} = \left[-\frac{121{,}1}{c^{(0)^2}} + c^{(1)}\left(\frac{31{,}90}{c^{(0)^2}} - 2{,}088\right) - 0{,}1872\, c^{(0)^2} - 1{,}749\right] \cdot 10^{-2}\,,$$

(entsprechend den Gleichungen (69), (78), (70), (79) in der am Schluß von Ziff. 9 angegebenen Gestalt). Daraus folgt durch Anwendung der Vorschriften von Ziff. 10

$$c_G^{(0)} = \pm\sqrt{\frac{q_2}{q_1}} = \pm 3{,}908\,, \qquad c_M^{(0)} = i\sqrt{\frac{q_2}{q_1}} = 3{,}908\, i\,,$$

$$c_G^{(1)} = 2{,}426 \left(\text{aus } \frac{\partial\, q^{(2)}}{\partial\, c^{(0)}} = 0\right), \qquad c_M^{(1)} = 5{,}163 \ (\text{aus } q_M^{(2)} = q_G^{(2)})\,,$$

$$q_G^{(1)} = \mp 0{,}1632\,, \qquad \bar{q}_M^{(1)} = -0{,}08162\, i\,,$$

$$q_G^{(2)} = -0{,}1253\,, \qquad \bar{q}_M^{(2)} = -0{,}1231\,.$$

Zur Berechnung der Glieder $j=3$ müssen zunächst die Hauptgleichungen $K_{2\,2\,0}^{(3)} = 0$ und $K_{12,\,-1}^{(3)} = 0$ nach (63,3) ausführlich hingeschrieben werden, ferner die Ausdrücke für die neu darin auftretenden Koeffizienten $c_{f\,2\,\eta}^{(2)}$ ($f = 1, 2, \ldots 6$; $\eta = 0, \pm 1, -2$). Setzt man darin für die $c^{(j)}$, $q^{(j)}$, $\bar{q}^{(j)}$ die eben für $j = 0, 1, 2$ angegebenen Zahlwerte ein, so kommt als Ergebnis

$$q_G^{(3)} = \pm 0{,}03265\,, \qquad J(\bar{q}_M^{(3)}) = -0{,}09918\,.$$

Damit haben wir also die beiden maßgebenden Ausdrücke

$$q_G = 1 \mp 0{,}1632\, \varepsilon - 0{,}1253\, \varepsilon^2 \pm 0{,}0327\, \varepsilon^3 + 0(\varepsilon^4)$$

als Grenzkurven des Instabilitätsbereichs und

$$\Re(\varrho_1)_M = -J\left(\frac{\bar{q}_M}{q_M}\right) = \frac{0{,}08162\, \varepsilon + 0{,}09918\, \varepsilon^3 + 0(\varepsilon^4)}{1 - 0{,}1253\, \varepsilon^2 + 0(\varepsilon^4)}$$

als Realteil des charakteristischen Exponenten auf der Mittellinie des Bereichs gefunden. Beide Ausdrücke kann man wohl unbedenklich bis zu etwa $\varepsilon = 0{,}3$ benutzen; man bekommt für $\varepsilon = 0{,}3$

$$q_G = 1 \mp 0{,}04896 - 0{,}01128 \pm 0{,}00088\,,$$

$$\Re(\varrho_1) = \frac{0{,}02449 + 0{,}00268}{1 - 0{,}01128} = 0{,}02748\,,$$

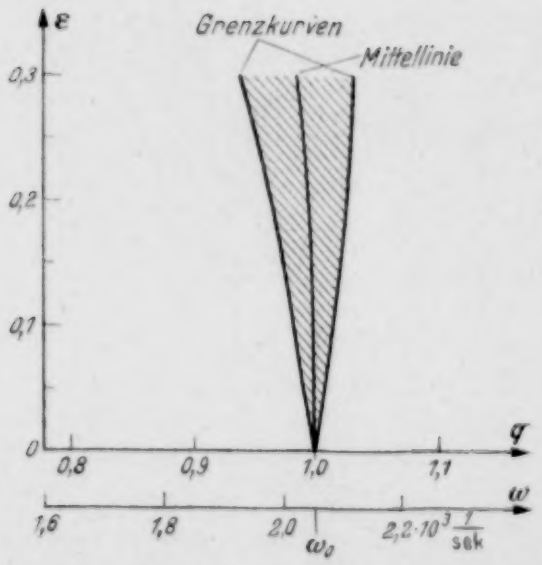

Abb. 5. Der im Beispiel berechnete Instabilitätsbereich zweiter Art.

woraus die praktisch befriedigende Konvergenz der Reihen ersichtlich ist. Die Glieder mit ε^3 bilden nur noch unwesentliche Korrekturen. In Abb. 5 ist der so berechnete Instabilitätsbereich in der (q, ε)- bzw. der (ω, ε)-Ebene zeichnerisch dargestellt und durch Schraffur gekennzeichnet. Der Realteil des charakteristischen Exponenten $\Re(\varrho_1)_M = 0{,}02748$ ist kennzeichnend für die stärkste Schwingungsaufschaukelung. Die Zahl besagt, daß sich die Amplitude der Zusatzverschiebung während jeder Vollschwingung der Grundbewegung mit $e^{2\pi \cdot 0{,}02748} = 1{,}189$ multipliziert. Nach 100 Schwingungen ist die Amplitude schon auf das $(1{,}189)^{100} = 3{,}16 \cdot 10^7$-fache gewachsen. Da die Grundschwingung eine Schwingungszahl von etwa 330 Hz hat, wird die Zerstörung des Stabes also rasch vor sich gehen, was bei der erheblichen Größe des pulsierenden äußeren Moments von $0{,}3\, M_{\text{kipp}}$ verständlich ist.

Schließlich ist noch das Konvergenzverhalten unserer Lösung für verschiedene n von Interesse. Wir haben deshalb, da die $q_G^{(1)}$, $\bar{q}_M^{(1)}$ von n unabhängig und die Glieder $\varepsilon^3\, q_G^{(3)}$, $\varepsilon^3\, J(\bar{q}_M^{(3)})$

schon recht klein sind, den Koeffizienten $q_G^{(2)}$ noch für einen eingliedrigen und einen zweigliedrigen Ansatz (24) ($n=2$ und 4) berechnet. Das Ergebnis lautet

$$q_G^{(2)} = \begin{cases} -0{,}1071 \text{ für } n=2\,, \\ -0{,}1267 \text{ für } n=4\,. \\ -0{,}1253 \text{ für } n=6 \end{cases}$$

und zeigt, daß unser Berechnungsverfahren für $n=6$ und wohl auch schon für $n=4$ einen hinreichenden Grad von Zuverlässigkeit besitzen dürfte, während der eingliedrige Ansatz ($n=2$) offenbar noch nicht ausreicht.

13. Zusammenfassende Schlußbemerkungen. Eine hier als erste Mitteilung bezeichnete Arbeit des Verfassers entwickelte aus dem *Hamilton*schen Prinzip der Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen durch Zusammenfassung der in den Zusatzverschiebungen quadratischen Teile eine Variationsgleichung, die das Stabilitätsproblem für die elastische Bewegung mathematisch formuliert. Die vorliegende Arbeit sucht das Problem zu lösen, indem sie einen *Ritz*ansatz mit zeitabhängigen Koeffizienten in die Variationsgleichung einführt und die *Euler*schen Differentialgleichungen für die Koeffizienten bildet. Da als Grundbewegung des elastischen Körpers eine harmonische erzwungene Schwingung angenommen wird, erscheint auf diese Weise ein lineares Differentialgleichungssystem mit periodischen Koeffizienten. Seine Integration gelingt in dem erforderlichen Umfang durch eine doppelte Reihenentwicklung der Lösungen nach trigonometrischen Funktionen und, dem Grundgedanken der Störungsrechnung folgend, nach Potenzen eines kleinen Parameters ε, der im wesentlichen die Amplitude der erregenden Kraft angibt. Aus dem Mechanismus der Reihenentwicklung heraus lassen sich in einer Koordinatenebene, auf deren Achsen die erregende Frequenz ω und der Parameter ε aufgetragen sind, die Gebiete abgrenzen, in denen die Grundbewegung stabil oder instabil ist, sowie die für die Instabilität maßgebenden charakteristischen Exponenten berechnen. Nähere Einzelheiten sind in Ziff. 11 zusammengestellt. Ein Beispiel (Ziff. 4 und 12) zeigt, daß die in allgemeiner Form durchgeführte Theorie in konkreten Einzelfällen numerisch brauchbar sein kann. Das Beispiel behandelt einen der hier neu gefundenen Instabilitätsbereiche zweiter Art, die mechanisch dadurch gekennzeichnet sind, daß die Aufschaukelung der Schwingung durch Zusammentreffen der Erregerfrequenz mit einem ganzzahligen Bruchteil der Schwebungsfrequenz zweier Eigenschwingungen des elastischen Körpers ermöglicht wird. Im übrigen mußte die vorliegende Untersuchung eine Reihe von Fragen offen lassen: Das Problem der Konvergenz der lediglich formal eingeführten Reihenentwicklungen ist noch ganz unerledigt und schließt sicherlich schwierige mathematische Fragen in sich. Ferner mußten die Sonderfälle, in denen gewisse Gliednenner verschwinden, beiseite bleiben und werden Spezialuntersuchungen notwendig machen. Weiter konnte die Dämpfung, die bezüglich der Übereinstimmung zwischen Theorie und Wirklichkeit sicherlich eine sehr erhebliche Rolle spielt, lediglich mit einer kurzen Bemerkung qualitativer Art gestreift werden (Ziff. 11). Und schließlich bleibt durch Behandlung möglichst vieler konkreter Einzelprobleme zu prüfen, wie weit die praktische Leistungsfähigkeit der vorliegenden Theorie bei der Durchforschung dieses jungen Seitengebietes der Elastizitätstheorie reicht, das wir mit dem Titel Stabilität erzwungener Schwingungen bezeichnen und das unzweifelhaft noch weit in den Anfängen steckt.

(Eingegangen am 15. Dezember 1948.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *Eberhard Mettler*, (20b) Clausthal-Zellerfeld, Bergakademie.

Über ein nichtlineares Elastizitätsgesetz.

Von H. Kauderer.

1. Einleitung. In der Elastizitätstheorie der kleinen Verformungen pflegt man von der Annahme auszugehen, daß zwischen den Spannungen und den Verzerrungen ein linearer Zusammenhang besteht. Es ist indessen seit langem bekannt, daß für eine große Anzahl von Stoffen diese *Hooke*sche Annahme auch schon in dem Bereich der von erster Ordnung kleinen Verzerrungen nicht mehr gerechtfertigt ist, falls man, wie üblich, unter von erster Ordnung kleinen Verzerrungen solche versteht, bei welchen die Quadrate der räumlichen Ableitungen der Verschiebungen gegenüber den ersten Potenzen dieser Größen vernachlässigbar klein sind. Diese Abweichung vom *Hooke*schen Gesetz ist unter den in der Technik gebräuchlichen Stoffen besonders deutlich bei Gußeisen, zahlreichen Nichteisenmetallen, Steinen, Zement, Beton und den meisten organischen Werkstoffen; in geringem Ausmaß ist sie auch bei einigen Eisen- und Stahlsorten feststellbar.

Schon mehrfach ist daher versucht worden, durch eine geeignete Annahme eines nichtlinearen Zusammenhangs zwischen Spannungen und Verzerrungen dem elastischen Verhalten dieser Stoffe gerecht zu werden. Dies geschieht z. B. in dem Ansatz von *Bach* und *Schüle*[1], die durch eine Gleichung der Form

$$\varepsilon = \alpha \sigma^m,$$

wobei α und m experimentell zu bestimmende Materialkonstanten sind, den Zusammenhang zwischen dem Betrag σ der Spannung und dem Betrag ε der Dehnung beim eindimensionalen Zug- oder Druckversuch beschreiben[2].

Ein anderer, von *Grübler*[3] benützter Ansatz von der Form

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{A + B\varepsilon}$$

mit den Materialkonstanten A und B, der von diesem auch für allgemeinere Spannungszustände erweitert wurde, wird, wie *Schlechtweg*[4] bemerkt hat, einigen wesentlichen Eigenschaften des Materials (z. B. Querdehnung) nicht gerecht. Er hat daher für spröde Stoffe den *Grübler*schen Ansatz verbessert. Das Elastizitätsgesetz von *Schlechtweg* hat jedoch, wie wir später nachweisen werden, den Nachteil, daß die sich bei ihm ergebende Formänderungsarbeit auch im Gebiet beliebig kleiner Verzerrungen vom Weg abhängt, auf dem der Körper in den verzerrten Zustand übergeführt wird. Der gleiche Nachteil haftet einem von *Hencky*[5] insbesondere für große Verzerrungen vorgeschlagenen Gesetz an, was dieser auch selbst feststellt.

Schließlich sind zwei Aufsätze von *Philippidis* und *Weber*[6] zu erwähnen, die während der Abfassung dieser Arbeit erschienen sind. Beide handeln von einem Elastizitätsgesetz, das in seinem Aufbau grundsätzlich mit dem hier neu herzuleitenden übereinstimmt.

Philippidis geht zur Ableitung dieses Gesetzes vom *Hooke*schen Gesetz für den dreidimensionalen Spannungszustand in folgender Form aus:

$$\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = 3K;\quad \frac{\sigma_1-\sigma_0}{\varepsilon_1-\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2-\sigma_0}{\varepsilon_2-\varepsilon_0} = \frac{\sigma_3-\sigma_0}{\varepsilon_3-\varepsilon_0} = \frac{\sqrt{(\sigma_1-\sigma_0)^2+(\sigma_2-\sigma_0)^2+(\sigma_3-\sigma_0)^2}}{\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_0)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_0)^2}} = G,$$

wobei K den Kompressions-, G den Schubmodul, σ_i und ε_i $(i=1, 2, 3)$ die Hauptspannungen und die Hauptdehnungen, σ_0 und ε_0 deren Mittelwerte bedeuten. Er verallgemeinert dieses Gesetz, indem er die Konstanten K und G durch beliebige, nur von ε_0 bzw. von

$$\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_0)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_0)^2}$$

---

[1] Siehe z. B. *C. Bach* und *R. Baumann*, Elastizität und Festigkeit, 9. Aufl. Berlin 1924.

[2] Eine Zusammenstellung der bis 1897 versuchten Näherungsansätze für Zug- und Druckversuche gibt *R. Mehmke*, Z. Math. Phys. 42 (1897) S. 327.

[3] *M. Grübler*, Z. VDI. 44 (1900) S. 1157.

[4] *H. Schlechtweg*, Z. angew. Math. Mech. 14 (1934) S. 5.

[5] *H. Hencky*, Z. techn. Physik 9 (1928) S. 215.

[6] *A. Philippidis*, Z. angew. Math. Mech. 25/27 (1947) S. 31. — *C. Weber*, Z. angew. Math. Mech. 28 (1948) S. 189, sowie Z. angew. Math. Mech. 29 (1949) S. 256 (Berichtigung).

abhängige Funktionen ersetzt, woraus er schließt, daß zwischen diesem für das elastische Gebiet aufgestellten Gesetz und der im Verfestigungsgebiet experimentell nachgewiesenen Beziehung

$$\sqrt{(\sigma_1-\sigma_0)^2+(\sigma_2-\sigma_0)^2+(\sigma_3-\sigma_0)^2} = f\left[\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_0)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_0)^2}\right],$$

in der f eine beliebige Funktion bedeutet, kein Unterschied besteht.

Weber geht im wesentlichen von der Annahme aus, daß sich (wie beim *Hooke*schen Gesetz) die Formänderungsarbeit in zwei Summanden zerlegen läßt, von denen der eine nur von ε_0, der andere nur von $(\varepsilon_1-\varepsilon_0)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_0)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_0)^2$ abhängt. Das Elastizitätsgesetz erhält hierdurch wieder die gleiche Form wie bei *Philippidis*.

Beiden Herleitungen dieses Gesetzes ist somit gemeinsam, daß eine willkürlich, aber geeignet gewählte Formulierung des *Hooke*schen Gesetzes herausgegriffen und in mathematisch naheliegender Weise verallgemeinert wird. Diesem mehr vom mathematisch formalen Standpunkt aus geleiteten Vorgehen soll hier ein Verfahren zur Ableitung des nichtlinearen Elastizitätsgesetzes gegenübergestellt werden, das die physikalische, experimentell gesicherte Seite des Problems in den Vordergrund rückt. Das Gesetz soll dabei zugleich auf eine mathematische Form gebracht werden, die seine Handhabung sowohl bei der experimentellen Auswertung als auch bei der Anwendung auf die im folgenden behandelten elastomechanischen Probleme möglichst einfach und übersichtlich macht.

2. Aufgabenstellung und Übersicht. Es soll also hier der Versuch gemacht werden, unter Beschränkung auf von erster Ordnung kleine Verzerrungen ein nichtlineares Elastizitätsgesetz herzuleiten, das auf beliebige, mit den Bedingungen der Statik verträgliche Spannungszustände anwendbar ist. Durch vier physikalische Forderungen an das elastische Verhalten, die besonders die in der Einleitung erwähnten Mängel früherer Ansätze ausschließen, wird die Form des Gesetzes im wesentlichen bis auf zwei willkürliche Funktionen des Spannungs- oder des Verzerrungstensors festgelegt, die das Material kennzeichnen und an Hand geeigneter Grundversuche zu bestimmen sind.

Nach einem kurzen, wegen der Definition der benützten Begriffe notwendigen Überblick über die Invarianten und die Zerlegungsformeln des Spannungs- und des Verzerrungstensors (Ziff. 3 und 4) werden die vier Forderungen an das elastische Verhalten, von denen sich drei auf die Existenz und die Gestalt eines Ausdrucks für die Formänderungsarbeit beziehen, formuliert (Ziff. 5). Hieraus wird das Elastizitätsgesetz (Ziff. 6) sowie der endgültige Ausdruck für die Formänderungsarbeit (Ziff. 7) hergeleitet. Das Elastizitätsgesetz wird zuerst auf einfache (größtenteils gleichförmige) Spannungszustände angewandt, die eine exakte Lösung der elastischen Grundgleichungen zulassen (Ziff. 8). Sodann wird an drei Beispielen gezeigt, wie man durch die experimentelle Verwirklichung einiger dieser Spannungszustände die zwei willkürlichen Funktionen des Elastizitätsgesetzes bestimmen kann (Ziff. 9), wobei sich zugleich praktische Hinweise dafür ergeben, unter welchen Bedingungen das elastische Verhalten eines Stoffes sich überhaupt durch das hier entwickelte Gesetz beschreiben läßt. Hieran schließt sich eine Gegenüberstellung mit den von *Bach*, *Grübler* und *Schlechtweg* formulierten Gesetzen (Ziff. 10). Mit der Anwendung des Gesetzes auf zwei Probleme der Elastizitätstheorie, nämlich das der reinen Biegung, das sich hier nicht mehr elementar behandeln läßt (Ziff. 11), und das der Torsion prismatischer Stäbe (Ziff. 12) soll ein erster Schritt getan werden auf dem Weg zur Entwicklung einer exakten nichtlinearen Elastizitätstheorie kleiner Verformungen. Abschließend (Ziff. 13) werden Hinweise gegeben, in welchen Richtungen die Theorie auszubauen ist.

3. Der Spannungszustand. Den Untersuchungen wird ein rechtshändiges kartesisches (x, y, z)-System zugrunde gelegt werden. Wir führen die Normalspannungen σ_x, σ_y, σ_z am Elementarquader $dx \cdot dy \cdot dz$ in üblicher Weise ein (als Zugspannungen mit positivem Zahlwert). Sind die Normalspannungen Hauptspannungen, so seien sie auch mit σ_1, σ_2, σ_3 bezeichnet. Die Schubspannungen seien τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}, wobei schon zum Ausdruck gebracht ist, daß der Satz von der Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen gelten soll. Der Spannungszustand läßt sich dann an jeder Stelle (x, y, z) des Körpers durch den Spannungstensor

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \tag{1}$$

darstellen. Zu dem Tensor T gehören als Invarianten drei von der Wahl des Koordinatensystems

und voneinander unabhängige Ausdrücke, die wir in der Form

$$S_1 = \sigma_x+\sigma_y+\sigma_z = \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\,,$$
$$S_2 = \sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2 = \sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\,,$$
$$S_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3$$

schreiben wollen. Den Zustand T teilen wir in bekannter Weise auf[1] in den hydrostatischen Spannungszustand, der durch den Tensor

$$T_0(x, y, z) = \sigma_0 \cdot E \tag{2}$$

gekennzeichnet ist, wobei

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) = \frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) = \frac{1}{3}S_1 \tag{3}$$

den Mittelwert der drei Hauptspannungen und E den Einheitstensor bedeutet, und den durch

$$T'(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sigma_x-\sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma_0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

bestimmten Spannungszustand. Da σ_0 eine von der Wahl des Koordinatensystems unabhängige Größe ist, gilt dies auch vom Tensor $T_0\,(x, y, z)$ und somit auch von $T'(x, y, z)$ als zweitem Summanden der Tensorgleichung

$$T = T_0+T'. \tag{5}$$

Die analog den Invarianten S_1, S_2, S_3 aus dem Tensor T' gebildeten Ausdrücke sind daher ebenfalls koordinateninvariant. Man erhält sie mit den Abkürzungen

$$\sigma'_x = \sigma_x-\sigma_0, \quad \sigma'_y = \sigma_y-\sigma_0, \quad \sigma'_z = \sigma_z-\sigma_0$$

in der Form

$$S'_1 = \sigma'_x+\sigma'_y+\sigma'_z = 0, \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} S'_2 &= \sigma'_x\sigma'_y+\sigma'_y\sigma'_z+\sigma'_z\sigma'_x-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2 \\ &= -\tfrac{1}{2}(\sigma'^2_x+\sigma'^2_y+\sigma'^2_z)-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2 \\ &= S_2-\tfrac{1}{3}S_1^2, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$S'_3 = \begin{vmatrix} \sigma'_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma'_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma'_z \end{vmatrix} = S_3-\tfrac{1}{3}S_1S_2+\tfrac{2}{27}S_1^3. \tag{8}$$

In den Hauptspannungen von T ausgedrückt, wird

$$S'_2 = -\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\left[(\sigma_1-\sigma_0)^2+(\sigma_2-\sigma_0)^2+(\sigma_3-\sigma_0)^2\right].$$

Die Invariante S'_2 ist somit stets negativ; ihr Betrag ist das Anderthalbfache der mittleren quadratischen Abweichung der drei Hauptspannungen von ihrem Mittelwert σ_0. Sie gibt also ein skalares Maß dafür, wie stark der Zustand T vom hydrostatischen Zustand T_0 abweicht.

Zwischen den Spannungen und den Komponenten X, Y, Z einer auf die Volumeneinheit bezogenen äußeren Kraft $\mathfrak{K}$ bestehen die bekannten Gleichgewichtsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X &= 0\,, \\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y &= 0\,, \\ \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z &= 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

die sich unter Verwendung des Begriffs der Tensordivergenz[2] als Vektorgleichung in der Form

$$\operatorname{div} T+\mathfrak{K} = 0$$

---

[1] Wir werden künftig den durch einen Tensor T bestimmten Spannungszustand kurz als „Zustand T" bezeichnen und uns später beim Verzerrungstensor sinngemäß ausdrücken.

[2] Siehe z. B. *R. Gans*, Vektoranalysis. Leipzig und Berlin 1929, S. 76.

schreiben lassen. In den Komponenten von T_0 und T' ausgedrückt, lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial \sigma_x'}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_0}{\partial x} + X = 0 ,$$

und zyklisch weiter, oder in Vektorform

$$\operatorname{div} T' + \operatorname{grad} \sigma_0 + \mathfrak{R} = 0 .$$

Der Zustand T' ist, für sich genommen, mit der Volumenkraft $\mathfrak{R}$ zusammen demnach nur dann ein Gleichgewichtszustand für den ganzen Körper, falls grad $\sigma_0 = 0$, also $\sigma_0 =$ konst ist.

4. Der Verzerrungszustand. Zur Beschreibung des Verzerrungszustandes gehen wir aus von dem räumlichen Feld $\mathfrak{s}(x, y, z)$ der Verschiebungsvektoren, deren Komponenten im (x, y, z)-System mit u, v, w bezeichnet seien. Da wir uns auf die Theorie der von erster Ordnung kleinen Verzerrungen beschränken wollen, führen wir als Verzerrungsgrößen die drei Dehnungen

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} , \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{10}$$

und die drei Scherungen

$$\psi_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} , \quad \psi_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} , \quad \psi_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \tag{11}$$

ein, die als Komponenten in dem Verzerrungstensor

$$D(x, y, z) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\psi_{xy} & \frac{1}{2}\psi_{zx} \\ \frac{1}{2}\psi_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\psi_{yz} \\ \frac{1}{2}\psi_{zx} & \frac{1}{2}\psi_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \tag{12}$$

auftreten. Sind die Dehnungen ε_x, ε_y, ε_z Hauptdehnungen, so seien sie auch mit ε_1, ε_2, ε_3 bezeichnet. Ähnlich wie zum Spannungstensor T gehören zum Verzerrungstensor D drei Invarianten, nämlich

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \operatorname{div} \mathfrak{s} ,$$

$$J_2 = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}(\psi_{xy}^2 + \psi_{yz}^2 + \psi_{zx}^2) = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 ,$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\psi_{xy} & \frac{1}{2}\psi_{zx} \\ \frac{1}{2}\psi_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\psi_{yz} \\ \frac{1}{2}\psi_{zx} & \frac{1}{2}\psi_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 .$$

Die Invariante J_1 ist die Volumendehnung eines Elementarquaders.

Ebenso wie den Spannungszustand T teilen wir auch den Verzerrungszustand D auf, und zwar in den Tensor

$$D_0(x, y, z) = \varepsilon_0 \cdot E \tag{13}$$

mit

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \frac{1}{3} J_1 , \tag{14}$$

der eine gestaltstreue Verzerrung (Ähnlichkeitsverzerrung) des Volumenelements bedeutet, und den Tensor

$$D'(x, y, z) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\psi_{xy} & \frac{1}{2}\psi_{zx} \\ \frac{1}{2}\psi_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\psi_{yz} \\ \frac{1}{2}\psi_{zx} & \frac{1}{2}\psi_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{pmatrix} , \tag{15}$$

der eine volumentreue Verzerrung bedeutet, so daß

$$D = D_0 + D'$$

wird. Entsprechend den Invarianten von T' erhält man mit den Abkürzungen

$$\varepsilon_x' = \varepsilon_x - \varepsilon_0 , \quad \varepsilon_y' = \varepsilon_y - \varepsilon_0 , \quad \varepsilon_z' = \varepsilon_z - \varepsilon_0$$

die Invarianten von D', nämlich

$$J_1' = \varepsilon_x' + \varepsilon_y' + \varepsilon_z' = 0\,, \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} J_2' &= \varepsilon_x'\,\varepsilon_y' + \varepsilon_y'\,\varepsilon_z' + \varepsilon_z'\,\varepsilon_x' - \tfrac{1}{4}(\psi_{xy}^2 + \psi_{yz}^2 + \psi_{zx}^2) \\ &= -\tfrac{1}{2}(\varepsilon_x'^2 + \varepsilon_y'^2 + \varepsilon_z'^2) - \tfrac{1}{4}(\psi_{xy}^2 + \psi_{yz}^2 + \psi_{zx}^2) \\ &= J_2 - \tfrac{1}{3}J_1^2\,. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$J_3' = \begin{vmatrix} \varepsilon_x' & \frac{1}{2}\psi_{xy} & \frac{1}{2}\psi_{zx} \\ \frac{1}{2}\psi_{xy} & \varepsilon_y' & \frac{1}{2}\psi_{yz} \\ \frac{1}{2}\psi_{zx} & \frac{1}{2}\psi_{yz} & \varepsilon_z' \end{vmatrix} = J_3 - \tfrac{1}{3}J_1J_2 + \tfrac{2}{27}J_1^3\,. \tag{18}$$

In den Hauptdehnungen ausgedrückt, wird

$$J_2' = -\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_2-\varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_3-\varepsilon_0)^2\right].$$

Die Invariante J_2' ist somit stets negativ; ihr Betrag gibt, ähnlich wie bei S_2', ein Maß dafür, wie stark der Zustand D vom gestaltstreuen Verzerrungszustand D_0 abweicht.

Da sich die sechs Verzerrungsgrößen von D in den Ableitungen der drei Verschiebungskomponenten u, v, w ausdrücken lassen, müssen zwischen ihnen die sechs (selbst nicht voneinander unabhängigen) Verträglichkeitsbedingungen[1]

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi_{xy}}{\partial x\,\partial y}\,, \quad 2\,\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\psi_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial\psi_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial\psi_{xy}}{\partial z}\right), \tag{19}$$

und je zyklisch weiter, erfüllt sein. Aus dem Bestehen dieser Gleichungen folgt, daß die entsprechenden zum Tensor D' gehörigen Verträglichkeitsbedingungen nur dann befriedigt werden können, wenn sämtliche zweiten Ableitungen von ε_0 verschwinden, also ε_0 eine lineare Funktion von x, y und z oder eine Konstante ist. Dies bedeutet aber, daß die am Volumenelement vorgenommene Aufteilung des Verzerrungszustandes D in einen gestalts- und einen volumentreuen Anteil nur dann auch am ganzen Körper möglich ist (unter Wahrung des Zusammenhangs der einzelnen Teile), wenn ε_0 der genannten Bedingung entspricht.

5. Forderungen an das elastische Verhalten. Um das Elastizitätsgesetz, d. h. die Form des Zusammenhangs zwischen dem Spannungszustand T und dem Verzerrungszustand D zu ermitteln, stellen wir jetzt an das Verhalten des Materials vier allgemeine, sich aus physikalischen Hypothesen ergebende Forderungen. Die ersten drei davon werden sich dadurch in mathematischer Form ausdrücken lassen, daß sich für die skalare Funktion A, welche die am Volumenelement geleistete, auf die Raumeinheit bezogene mechanische Arbeit bedeuten möge, die bei der Verformung aufzuwenden ist, eine ganz bestimmte Form der Abhängigkeit von den Verzerrungsgrößen ergibt. Aus dieser Form von A werden wir dann in der nächsten Ziffer das Elastizitätsgesetz herleiten.

1. Forderung. Die Verzerrungsarbeit A soll eine eindeutige Funktion des Verzerrungszustands des Elementes, also der sechs den Tensor D bestimmenden Verzerrungsgrößen sein. Sie soll verschwinden, wenn D gleich Null ist.

Um nun aber durch diese Forderung das Elastizitätsgesetz nicht auf diejenigen Stoffe beschränken zu müssen, die vollkommen elastisch im Sinn der energetischen Definition dieses Begriffes sind[2], kann man etwa einräumen, daß für den Weg, auf dem das Volumenelement vom verzerrungsfreien Ausgangszustand in den Zustand D übergeführt wird, gewisse Vorschriften gemacht werden. Es wird sich hier hauptsächlich darum handeln, daß man nur solche Verformungswege zuläßt, bei welchen die Beträge der Verzerrungskomponenten bis zum Übergang in den Endzustand nicht abnehmen. Ein Spezialfall hievon kann etwa dadurch definiert werden, daß der Verzerrungszustand zur Zeit t durch den Tensor $\vartheta(t)\cdot D$ bestimmt wird, wobei $\vartheta(t)$ eine beliebige, zwischen dem Anfangszeitpunkt und dem Endzeitpunkt des Verzerrungsvorganges monoton von Null auf Eins anwachsende Funktion ist.

---

[1] Siehe z. B. *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik. Berlin 1939, S. 23.

[2] Nach dem Vorschlag von *G. Sachs*, Kongreßbuch Zürich des Internationalen Verbandes für Materialprüfung. Zürich 1932, S. 548.

2. Forderung. Der Stoff soll homogen und isotrop sein, also hinsichtlich seines elastischen Verhaltens keine ausgezeichneten Stellen oder Richtungen aufweisen. Es ist daher auch von der Verzerrungsarbeit A zu fordern, daß sie allein von den koordinatenunabhängigen Invarianten J_1, J_2 und J_3 des Verzerrungstensors abhängt[1].

3. Forderung. Die folgende Forderung wird nahegelegt durch die *v. Mises*sche Plastizitätshypothese[2], die durch zahlreiche Versuche von *Roš* und *Eichinger*[3] bestätigt wurde. Nach dieser wird die Fließgrenze eines Stoffes allein durch den volumentreuen Anteil T' des Spannungstensors bestimmt. Es erscheint daher die Annahme berechtigt, daß auch schon vor dem Eintritt in das plastische Gebiet die zusätzliche Verzerrung D_2, die ein Volumenelement infolge eines Spannungszustandes T' erleidet, unabhängig ist von einer etwaigen Verzerrung D_1, die das Element vorher durch einen hydrostatischen Spannungszustand T_0 erfahren hat. Die Verformung infolge von T_0 kann aber wegen der Isotropieforderung nur in einer gestaltstreuen Verzerrung bestehen. Denkt man sich nun den Spannungszustand T in der Weise aufgebracht, daß zuerst T_0 und sodann zusätzlich T' am Element angreift, so wird die entstehende Verzerrung D sich zusammensetzen müssen aus einem Kugeltensor $D_1(T_0)$, der sich in der Form cD_0 mit irgendeiner Konstanten c durch den gestaltstreuen Anteil D_0 von D darstellen läßt, und dem Tensor $D_2(T')$, der dann den Wert $(1-c)\,D_0+D'$ annimmt. Da aber

$$(1-c)\,D_0=\frac{1-c}{c}\,D_1(T_0)$$

eine Funktion von T_0 ist, darf dieses Glied in dem Ausdruck für den Tensor D_2, der nur von T' abhängen soll, nicht auftreten, so daß $c=1$ und damit $D_1(T_0)=D_0$ und $D_2(T')=D'$, also

$$D(T)=D_0(T_0)+D'(T')$$

gesetzt werden muß.

Diese Beziehung für den Verzerrungstensor muß jetzt sinngemäß auch für die Verzerrungsarbeit gelten. Wir fordern also, daß sich auch A aufteilen läßt in einen nur von D_0 abhängigen Anteil A_0 und einen allein durch D' bestimmten Anteil A'. Beide Anteile müssen die zweite Forderung erfüllen, d. h. A_0 darf nur von der (einzigen) Invarianten J_1 von D_0 abhängen, während A' eine Funktion von J_2' und J_3' sein darf. Man erhält so die Zerlegung

$$\left.\begin{aligned} A(J_1,J_2,J_3) &= A_0(J_1)+A'(J_2',J_3') \\ &= A_0(J_1)+A'\left(J_2-\tfrac{1}{3}J_1^2, J_3-\tfrac{1}{3}J_1J_2+\tfrac{2}{27}J_1^3\right). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

4. Forderung. Durch Versuche ist erwiesen, daß das Verhalten der festen Körper bei hinreichend kleinen Verzerrungen beliebig wenig vom *Hooke*schen Gesetz abweicht[4]. Wir wollen daher allgemein fordern, daß das zu formulierende Elastizitätsgesetz für jeden Verzerrungstensor kD mit $k\to 0$ in das *Hooke*sche Gesetz übergeht. Dies wird sich in den Fällen, in welchen sich die Spannungen durch Potenzreihen in den Verzerrungen darstellen lassen, darin ausdrücken müssen, daß das *Hooke*sche Gesetz erscheint, wenn man die Glieder von zweiter und höherer Ordnung in der Reihenentwicklung streicht. — Daß man trotz der Annahme kleiner Verzerrungen dies nicht allgemein tun darf, werden die zu behandelnden Beispiele zeigen, bei denen die Koeffizienten der Glieder höherer Ordnung in den Dehnungen teilweise so groß werden, daß sie auch schon bei den in der Theorie der kleinen Verzerrungen üblichen Zahlwerten gegenüber den Gliedern erster Ordnung nicht mehr vernachlässigt werden dürfen.

6. Herleitung der allgemeinen Form des Elastizitätsgesetzes für kleine Verzerrungen. Wir werden nun, ausgehend von dem Ansatz (20) für die Verzerrungsarbeit und unter Beachtung der vierten Forderung, untersuchen, was für ein Zusammenhang zwischen den Komponenten des Spannungs- und des Verzerrungstensors bestehen muß.

Bekanntlich erhält man unter der Voraussetzung, daß der Verzerrungsvorgang isotherm verläuft, bei kleinen Verzerrungen die Komponenten des Spannungstensors als die partiellen Ableitungen der in den Verzerrungen ausgedrückten Verzerrungsarbeit A nach den entsprechenden Komponenten des Verzerrungstensors, wobei der Faktor $\frac{1}{2}$ bei den Scherungskomponenten

---

[1] Siehe z. B. *G. Hamel*, Elementare Mechanik. Leipzig und Berlin 1912, S. 571.

[2] *R. v. Mises*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. phys. Klasse (1913), S. 582.

[3] *M. Roš* und *A. Eichinger*, Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr. Zürich 1926, sowie Diskussionsberichte der Eidg. Materialprüfungsanstalt in Zürich, Nr. 28 (1928) und Nr. 34 (1929).

[4] *E. Grüneisen*, Verh. D. phys. Ges. 4 (1906) S. 469, und *F. Kohlrausch* und *E. Grüneisen*, Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Klasse 1901, S. 1086.

wegzulassen ist[1]. Da wir auf Grund der dritten Forderung die Verzerrungsarbeit A am Volumenelement gemäß den zwei voneinander unabhängigen Verzerrungsvorgängen D_0 und D' in die zwei Anteile A_0 und A' aufteilen, so muß jener Zusammenhang auch für die Komponenten der die Arbeitsanteile $A_0(J_1)$ bzw. $A'(J_2', J_3')$ leistenden Spannungstensoren T_0 und T' je für sich bestehen, d. h. es muß sein

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\frac{\partial A_0}{\partial \varepsilon_0} = \frac{1}{3}\frac{dA_0}{dJ_1}\cdot\frac{dJ_1}{d\varepsilon_0} = \frac{dA_0}{dJ_1}, \tag{21}$$

$$\sigma_x' = \frac{\partial A'}{\partial \varepsilon_x'}, \quad \sigma_y' = \frac{\partial A'}{\partial \varepsilon_y'}, \quad \sigma_z' = \frac{\partial A'}{\partial \varepsilon_z'}; \quad \tau_{xy} = \frac{\partial A'}{\partial \psi_{xy}}, \quad \tau_{yz} = \frac{\partial A'}{\partial \psi_{yz}}, \quad \tau_{zx} = \frac{\partial A'}{\partial \psi_{zx}}. \tag{22}$$

(Der Faktor $\frac{1}{3}$ ist in (21) deshalb einzufügen, weil die drei Dehnungen für die drei Koordinatenrichtungen sämtliche mit dem gleichen Symbol ε_0 bezeichnet werden und die Ableitung natürlich nur jeweils partiell nach einer dieser drei Dehnungsgrößen zu bilden ist.) So werden wegen

$$\frac{\partial J_2'}{\partial \varepsilon_x'} = -\varepsilon_x', \qquad \frac{\partial J_3'}{\partial \varepsilon_x'} = \varepsilon_y'\varepsilon_z' - \frac{1}{4}\psi_{yz}^2$$

und der hieraus durch zyklische Vertauschung entstehenden Gleichungen die Spannungen

$$\sigma_x' = \frac{\partial A'}{\partial J_2'}\frac{\partial J_2'}{\partial \varepsilon_x'} + \frac{\partial A'}{\partial J_3'}\frac{\partial J_3'}{\partial \varepsilon_x'} = -\frac{\partial A'}{\partial J_2'}\varepsilon_x' + \frac{\partial A'}{\partial J_3'}\left(\varepsilon_y'\varepsilon_z' - \frac{1}{4}\psi_{yz}^2\right),$$

$$\sigma_y' = \frac{\partial A'}{\partial J_2'}\frac{\partial J_2'}{\partial \varepsilon_y'} + \frac{\partial A'}{\partial J_3'}\frac{\partial J_3'}{\partial \varepsilon_y'} = -\frac{\partial A'}{\partial J_2'}\varepsilon_y' + \frac{\partial A'}{\partial J_3'}\left(\varepsilon_z'\varepsilon_x' - \frac{1}{4}\psi_{zx}^2\right),$$

$$\sigma_z' = \frac{\partial A'}{\partial J_2'}\frac{\partial J_2'}{\partial \varepsilon_z'} + \frac{\partial A'}{\partial J_3'}\frac{\partial J_3'}{\partial \varepsilon_z'} = -\frac{\partial A'}{\partial J_2'}\varepsilon_z' + \frac{\partial A'}{\partial J_3'}\left(\varepsilon_x'\varepsilon_y' - \frac{1}{4}\psi_{xy}^2\right).$$

Da sowohl nach (6)

$$\sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z' = 0$$

als auch nach (16)

$$\varepsilon_x' + \varepsilon_y' + \varepsilon_z' = 0$$

ist, folgt wegen (17) aus der Summation der drei Gleichungen, daß

$$\frac{\partial A'}{\partial J_3'}\left[\varepsilon_y'\varepsilon_z' + \varepsilon_z'\varepsilon_x' + \varepsilon_x'\varepsilon_y' - \frac{1}{4}(\psi_{yz}^2 + \psi_{zx}^2 + \psi_{xy}^2)\right] = \frac{\partial A}{\partial J_3'}J_2' = 0$$

wird. Dies bedeutet aber, daß A' von J_3' unabhängig sein muß, da ja J_2' nicht identisch verschwinden kann. Dann wird aber wegen

$$\frac{\partial J_2'}{\partial \psi_{xy}} = -\frac{1}{2}\psi_{xy}$$

die Schubspannung

$$\tau_{xy} = \frac{dA'}{dJ_2'}\frac{\partial J_2'}{\partial \psi_{xy}} = -\frac{dA'}{dJ_2'}\cdot\frac{1}{2}\psi_{xy},$$

und zyklisch weiter. Somit lassen sich die Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen mit Hilfe der beiden, nunmehr die Form $A_0(J_1)$ und $A'(J_2')$ annehmenden Ausdrücke für Volumen- und Gestaltänderungsarbeit je Volumeneinheit in den beiden folgenden Gleichungen zusammenfassen

$$\sigma_0 = \frac{dA_0}{dJ_1}, \qquad T' = -\frac{dA'}{dJ_2'}D'.$$

Die beiden Funktionen dA_0/dJ_1 und dA'/dJ_2' bestimmen daher vollständig das elastische Verhalten des Körpers. Ihr Verlauf hat allein der vierten Forderung zu genügen, darf aber sonst willkürlich sein. Es ist zweckmäßig, an Stelle von J_1 und J_2' als neue Veränderliche die in (14) eingeführte mittlere Dehnung ε_0 und eine neue reelle Verzerrungsgröße ψ_0, deren Quadrat

$$\psi_0^2 = -\frac{8}{3}J_2' = \frac{2}{3}\left[2(\varepsilon_x'^2 + \varepsilon_y'^2 + \varepsilon_z'^2) + \psi_{xy}^2 + \psi_{yz}^2 + \psi_{zx}^2\right] \tag{23}$$

sei, zu benützen. Dann läßt sich dA_0/dJ_1 auch als Funktion von ε_0 und dA'/dJ_2' als Funktion von ψ_0^2 darstellen.

Nun lautet bekanntlich das *Hooke*sche Gesetz, nach σ_0 bzw. T' aufgelöst, mit dem Kompressionsmodul K und dem Schubmodul G

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \qquad T' = 2GD'. \tag{24), (25}$$

---

[1] Siehe z. B. *H. v. Helmholtz*, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. II. Leipzig 1902, S. 77.

Setzen wir also dA_0/dJ_1 und dA'/dJ_2' mit den zunächst beliebigen Funktionen $\varkappa(\varepsilon_0)$ und $\gamma(\psi_0^2)$ in der Form

$$\frac{dA_0}{dJ_1} = 3K\varepsilon_0 \cdot \varkappa(\varepsilon_0)\,, \quad \frac{dA'}{dJ_2'} = -2G \cdot \gamma(\psi_0^2) \tag{26}$$

an, so muß offenbar, um der vierten Forderung zu genügen,

$$\lim_{\varepsilon_0 \to 0} \varkappa(\varepsilon_0) = 1\,, \qquad \lim_{\psi_0 \to 0} \gamma(\psi_0^2) = 1$$

sein. Wenn für $\varkappa(\varepsilon_0)$ und $\gamma(\psi_0^2)$Potenzreihenentwicklungen möglich sind, werden diese somit die Form haben müssen

$$\left.\begin{aligned} \varkappa(\varepsilon_0) &= 1 + \varkappa_1\varepsilon_0 + \varkappa_2\varepsilon_0^2 + \varkappa_3\varepsilon_0^3 + \cdots, \\ \gamma(\psi_0^2) &= 1 + \gamma_2\psi_0^2 + \gamma_4\psi_0^4 + \gamma_6\psi_0^6 + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

und das Elastizitätsgesetz erhält dann die Gestalt

$$\sigma_0 = 3K\varkappa(\varepsilon_0)\varepsilon_0\,, \qquad T' = 2G\gamma(\psi_0^2)D'\,. \tag{28), (29}$$

Wir bezeichnen die Funktion $\varkappa(\varepsilon_0)$, mit welcher der Kompressionsmodul K in (24) zu multiplizieren ist, um (28) zu erhalten, als „Dehnungsfunktion" und entsprechend die Funktion $\gamma(\psi_0^2)$ als „Scherungsfunktion". Der Verlauf dieser beiden Funktionen bzw. deren Entwicklungskoeffizienten $\varkappa_i$ und γ_i sind, zusammen mit K und G selbst, durch geeignete Grundversuche experimentell zu bestimmen. Wie sich eine solche Bestimmung durchführen läßt, wird in Ziff. 9 gezeigt werden.

Addiert man die mit dem Einheitstensor E multiplizierte Gleichung (28) für σ_0 zu der Gleichung (29) für T', so folgt unter Beachtung von (2), (5) und (13)

$$T = T_0 + T' = 3K\varkappa(\varepsilon_0)D_0 + 2G\gamma(\psi_0^2)D'\,. \tag{30}$$

Für die einzelnen Komponenten von T ergibt sich dann

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 3K\varkappa(\varepsilon_0)\varepsilon_0 + 2G\gamma(\psi_0^2)(\varepsilon_x - \varepsilon_0)\,, \\ \sigma_y &= 3K\varkappa(\varepsilon_0)\varepsilon_0 + 2G\gamma(\psi_0^2)(\varepsilon_y - \varepsilon_0)\,, \\ \sigma_z &= 3K\varkappa(\varepsilon_0)\varepsilon_0 + 2G\gamma(\psi_0^2)(\varepsilon_z - \varepsilon_0)\,; \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma(\psi_0^2)\psi_{xy}\,, \qquad \tau_{yz} = G\gamma(\psi_0^2)\psi_{yz}\,, \qquad \tau_{zx} = G\gamma(\psi_0^2)\psi_{zx}\,. \tag{32}$$

Um die Gleichungen nach den Verzerrungen aufzulösen, müssen wir die Dehnungsfunktion und die Scherungsfunktion durch Funktionen von Spannungsgrößen ersetzen. Hiezu bilden wir in der Gleichung (29) beiderseits die zweite Tensorinvariante; dann erhalten wir

$$S_2' = [2G\gamma(\psi_0^2)]^2 J_2'$$

oder, wenn wir eine neue reelle Spannungsgröße τ_0 durch

$$\tau_0^2 = -\tfrac{2}{3}S_2' = \tfrac{2}{3}\left[\tfrac{1}{2}(\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right] \tag{33}$$

einführen, wegen (23)

$$\tau_0 = G\gamma(\psi_0^2)\psi_0\,.^{1} \tag{34}$$

Mit den dimensionslosen Spannungsgrößen

$$s_0 = \frac{\sigma_0}{3K}\,, \qquad t_0 = \frac{\tau_0}{G} \tag{35}$$

lauten somit die Gleichungen (28) und (34)

$$s_0 = \varkappa(\varepsilon_0)\varepsilon_0\,, \qquad t_0 = \gamma(\psi_0^2)\psi_0\,. \tag{36}$$

Wir führen jetzt mit Hilfe zweier Funktionen von s_0 und t_0^2, nämlich der „Kompressionsfunktion" $k(s_0)$ und der „Schubfunktion" $g(t_0^2)$ die Umkehrungen dieses funktionalen Zusammenhangs in der Form

$$\varepsilon_0 = s_0 k(s_0)\,, \qquad \psi_0 = t_0 g(t_0^2) \tag{37}$$

ein. Sind die Funktionen $\varkappa(\varepsilon_0)$ und $\gamma(\psi_0^2)$ in Potenzreihen nach (27) entwickelbar, so erhalten die Potenzreihen für $k(s_0)$ und $g(t_0^2)$ die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} k(s_0) &= 1 + k_1 s_0 + k_2 s_0^2 + k_3 s_0^3 + \cdots, \\ g(t_0^2) &= 1 + g_2 t_0^2 + g_4 t_0^4 + g_6 t_0^6 + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

---

[1] Daß diese Gleichung auch im Verfestigungsbereich besteht, haben *Roš*, *Eichinger* (a. a. O.) sowie *R. Schmidt* [Ing.-Arch. 3 (1932) S. 215] experimentell nachgewiesen.

wegzulassen ist[1]. Da wir auf Grund der dritten Forderung die Verzerrungsarbeit A am Volumenelement gemäß den zwei voneinander unabhängigen Verzerrungsvorgängen D_0 und D' in die zwei Anteile A_0 und A' aufteilen, so muß jener Zusammenhang auch für die Komponenten der die Arbeitsanteile $A_0(J_1)$ bzw. $A'(J_2', J_3')$ leistenden Spannungstensoren T_0 und T' je für sich bestehen, d. h. es muß sein

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\frac{\partial A_0}{\partial \varepsilon_0} = \frac{1}{3}\frac{dA_0}{dJ_1}\cdot\frac{dJ_1}{d\varepsilon_0} = \frac{dA_0}{dJ_1}, \tag{21}$$

$$\sigma_x' = \frac{\partial A'}{\partial \varepsilon_x'}, \quad \sigma_y' = \frac{\partial A'}{\partial \varepsilon_y'}, \quad \sigma_z' = \frac{\partial A'}{\partial \varepsilon_z'}; \quad \tau_{xy} = \frac{\partial A'}{\partial \psi_{xy}}, \quad \tau_{yz} = \frac{\partial A'}{\partial \psi_{yz}}, \quad \tau_{zx} = \frac{\partial A'}{\partial \psi_{zx}}. \tag{22}$$

(Der Faktor $\frac{1}{3}$ ist in (21) deshalb einzufügen, weil die drei Dehnungen für die drei Koordinatenrichtungen sämtliche mit dem gleichen Symbol ε_0 bezeichnet werden und die Ableitung natürlich nur jeweils partiell nach einer dieser drei Dehnungsgrößen zu bilden ist.) So werden wegen

$$\frac{\partial J_2'}{\partial \varepsilon_x'} = -\varepsilon_x', \qquad \frac{\partial J_3'}{\partial \varepsilon_x'} = \varepsilon_y'\varepsilon_z' - \frac{1}{4}\psi_{yz}^2$$

und der hieraus durch zyklische Vertauschung entstehenden Gleichungen die Spannungen

$$\sigma_x' = \frac{\partial A'}{\partial J_2'}\frac{\partial J_2'}{\partial \varepsilon_x'} + \frac{\partial A'}{\partial J_3'}\frac{\partial J_3'}{\partial \varepsilon_x'} = -\frac{\partial A'}{\partial J_2'}\varepsilon_x' + \frac{\partial A'}{\partial J_3'}\left(\varepsilon_y'\varepsilon_z' - \frac{1}{4}\psi_{yz}^2\right),$$

$$\sigma_y' = \frac{\partial A'}{\partial J_2'}\frac{\partial J_2'}{\partial \varepsilon_y'} + \frac{\partial A'}{\partial J_3'}\frac{\partial J_3'}{\partial \varepsilon_y'} = -\frac{\partial A'}{\partial J_2'}\varepsilon_y' + \frac{\partial A'}{\partial J_3'}\left(\varepsilon_z'\varepsilon_x' - \frac{1}{4}\psi_{zx}^2\right),$$

$$\sigma_z' = \frac{\partial A'}{\partial J_2'}\frac{\partial J_2'}{\partial \varepsilon_z'} + \frac{\partial A'}{\partial J_3'}\frac{\partial J_3'}{\partial \varepsilon_z'} = -\frac{\partial A'}{\partial J_2'}\varepsilon_z' + \frac{\partial A'}{\partial J_3'}\left(\varepsilon_x'\varepsilon_y' - \frac{1}{4}\psi_{xy}^2\right).$$

Da sowohl nach (6)

$$\sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z' = 0$$

als auch nach (16)

$$\varepsilon_x' + \varepsilon_y' + \varepsilon_z' = 0$$

ist, folgt wegen (17) aus der Summation der drei Gleichungen, daß

$$\frac{\partial A'}{\partial J_3'}\left[\varepsilon_y'\varepsilon_z' + \varepsilon_z'\varepsilon_x' + \varepsilon_x'\varepsilon_y' - \frac{1}{4}(\psi_{yz}^2 + \psi_{zx}^2 + \psi_{xy}^2)\right] = \frac{\partial A}{\partial J_3'}J_2' = 0$$

wird. Dies bedeutet aber, daß A' von J_3' unabhängig sein muß, da ja J_2' nicht identisch verschwinden kann. Dann wird aber wegen

$$\frac{\partial J_2'}{\partial \psi_{xy}} = -\frac{1}{2}\psi_{xy}$$

die Schubspannung

$$\tau_{xy} = \frac{dA'}{dJ_2'}\frac{\partial J_2'}{\partial \psi_{xy}} = -\frac{dA'}{dJ_2'}\cdot\frac{1}{2}\psi_{xy},$$

und zyklisch weiter. Somit lassen sich die Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen mit Hilfe der beiden, nunmehr die Form $A_0(J_1)$ und $A'(J_2')$ annehmenden Ausdrücke für Volumen- und Gestaltänderungsarbeit je Volumeneinheit in den beiden folgenden Gleichungen zusammenfassen

$$\sigma_0 = \frac{dA_0}{dJ_1}, \qquad T' = -\frac{dA'}{dJ_2'}D'.$$

Die beiden Funktionen dA_0/dJ_1 und dA'/dJ_2' bestimmen daher vollständig das elastische Verhalten des Körpers. Ihr Verlauf hat allein der vierten Forderung zu genügen, darf aber sonst willkürlich sein. Es ist zweckmäßig, an Stelle von J_1 und J_2' als neue Veränderliche die in (14) eingeführte mittlere Dehnung ε_0 und eine neue reelle Verzerrungsgröße ψ_0, deren Quadrat

$$\psi_0^2 = -\tfrac{8}{3}J_2' = \tfrac{2}{3}\left[2(\varepsilon_x'^2 + \varepsilon_y'^2 + \varepsilon_z'^2) + \psi_{xy}^2 + \psi_{yz}^2 + \psi_{zx}^2\right] \tag{23}$$

sei, zu benützen. Dann läßt sich dA_0/dJ_1 auch als Funktion von ε_0 und dA'/dJ_2' als Funktion von ψ_0^2 darstellen.

Nun lautet bekanntlich das *Hooke*sche Gesetz, nach σ_0 bzw. T' aufgelöst, mit dem Kompressionsmodul K und dem Schubmodul G

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \qquad T' = 2GD'. \tag{24), (25}$$

[1] Siehe z. B. *H. v. Helmholtz*, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. II. Leipzig 1902, S. 77.

Setzen wir also dA_0/dJ_1 und dA'/dJ_2' mit den zunächst beliebigen Funktionen $\varkappa(\varepsilon_0)$ und $\gamma(\psi_0^2)$ in der Form

$$\frac{dA_0}{dJ_1} = 3K\varepsilon_0 \cdot \varkappa(\varepsilon_0)\,, \quad \frac{dA'}{dJ_2'} = -2G \cdot \gamma(\psi_0^2) \tag{26}$$

an, so muß offenbar, um der vierten Forderung zu genügen,

$$\lim_{\varepsilon_0 \to 0} \varkappa(\varepsilon_0) = 1\,, \qquad \lim_{\psi_0 \to 0} \gamma(\psi_0^2) = 1$$

sein. Wenn für $\varkappa(\varepsilon_0)$ und $\gamma(\psi_0^2)$Potenzreihenentwicklungen möglich sind, werden diese somit die Form haben müssen

$$\left.\begin{aligned} \varkappa(\varepsilon_0) &= 1 + \varkappa_1\varepsilon_0 + \varkappa_2\varepsilon_0^2 + \varkappa_3\varepsilon_0^3 + \cdots\,, \\ \gamma(\psi_0^2) &= 1 + \gamma_2\psi_0^2 + \gamma_4\psi_0^4 + \gamma_6\psi_0^6 + \cdots\,, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

und das Elastizitätsgesetz erhält dann die Gestalt

$$\sigma_0 = 3K\varkappa(\varepsilon_0)\varepsilon_0\,, \qquad T' = 2G\gamma(\psi_0^2)D'\,. \tag{28), (29}$$

Wir bezeichnen die Funktion $\varkappa(\varepsilon_0)$, mit welcher der Kompressionsmodul K in (24) zu multiplizieren ist, um (28) zu erhalten, als „Dehnungsfunktion" und entsprechend die Funktion $\gamma(\psi_0^2)$ als „Scherungsfunktion". Der Verlauf dieser beiden Funktionen bzw. deren Entwicklungskoeffizienten $\varkappa_i$ und γ_i sind, zusammen mit K und G selbst, durch geeignete Grundversuche experimentell zu bestimmen. Wie sich eine solche Bestimmung durchführen läßt, wird in Ziff. 9 gezeigt werden.

Addiert man die mit dem Einheitstensor E multiplizierte Gleichung (28) für σ_0 zu der Gleichung (29) für T', so folgt unter Beachtung von (2), (5) und (13)

$$T = T_0 + T' = 3K\varkappa(\varepsilon_0)D_0 + 2G\gamma(\psi_0^2)D'\,. \tag{30}$$

Für die einzelnen Komponenten von T ergibt sich dann

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 3K\varkappa(\varepsilon_0)\varepsilon_0 + 2G\gamma(\psi_0^2)(\varepsilon_x - \varepsilon_0)\,, \\ \sigma_y &= 3K\varkappa(\varepsilon_0)\varepsilon_0 + 2G\gamma(\psi_0^2)(\varepsilon_y - \varepsilon_0)\,, \\ \sigma_z &= 3K\varkappa(\varepsilon_0)\varepsilon_0 + 2G\gamma(\psi_0^2)(\varepsilon_z - \varepsilon_0)\,; \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma(\psi_0^2)\psi_{xy}\,, \qquad \tau_{yz} = G\gamma(\psi_0^2)\psi_{yz}\,, \qquad \tau_{zx} = G\gamma(\psi_0^2)\psi_{zx}\,. \tag{32}$$

Um die Gleichungen nach den Verzerrungen aufzulösen, müssen wir die Dehnungsfunktion und die Scherungsfunktion durch Funktionen von Spannungsgrößen ersetzen. Hiezu bilden wir in der Gleichung (29) beiderseits die zweite Tensorinvariante; dann erhalten wir

$$S_2' = [2G\gamma(\psi_0^2)]^2 J_2'$$

oder, wenn wir eine neue reelle Spannungsgröße τ_0 durch

$$\tau_0^2 = -\frac{2}{3}S_2' = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right] \tag{33}$$

einführen, wegen (23)

$$\tau_0 = G\gamma(\psi_0^2)\psi_0\,.^1 \tag{34}$$

Mit den dimensionslosen Spannungsgrößen

$$s_0 = \frac{\sigma_0}{3K}\,, \qquad t_0 = \frac{\tau_0}{G} \tag{35}$$

lauten somit die Gleichungen (28) und (34)

$$s_0 = \varkappa(\varepsilon_0)\varepsilon_0\,, \qquad t_0 = \gamma(\psi_0^2)\psi_0\,. \tag{36}$$

Wir führen jetzt mit Hilfe zweier Funktionen von s_0 und t_0^2, nämlich der „Kompressionsfunktion" $k(s_0)$ und der „Schubfunktion" $g(t_0^2)$ die Umkehrungen dieses funktionalen Zusammenhangs in der Form

$$\varepsilon_0 = s_0 k(s_0)\,, \qquad \psi_0 = t_0 g(t_0^2) \tag{37}$$

ein. Sind die Funktionen $\varkappa(\varepsilon_0)$ und $\gamma(\psi_0^2)$ in Potenzreihen nach (27) entwickelbar, so erhalten die Potenzreihen für $k(s_0)$ und $g(t_0^2)$ die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} k(s_0) &= 1 + k_1 s_0 + k_2 s_0^2 + k_3 s_0^3 + \cdots\,, \\ g(t_0^2) &= 1 + g_2 t_0^2 + g_4 t_0^4 + g_6 t_0^6 + \cdots\,, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

---

[1] Daß diese Gleichung auch im Verfestigungsbereich besteht, haben *Roß*, *Eichinger* (a. a. O.) sowie *R. Schmidt* [Ing.-Arch. 3 (1932) S. 215] experimentell nachgewiesen.

wobei nach den Regeln über die Umkehrung von Potenzreihen

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= -\varkappa_1, \quad k_2 = 2\,\varkappa_1^2 - \varkappa_2, \quad k_3 = -(5\,\varkappa_1^3 - 5\,\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_3)\,, \\ k_4 &= 14\,\varkappa_1^4 - 21\,\varkappa_1^2\varkappa_2 + 6\,\varkappa_1\varkappa_3 + 3\,\varkappa_2^2 - \varkappa_4\,, \\ k_5 &= -7\left(6\,\varkappa_1^5 - 12\,\varkappa_1^3\varkappa_2 + 4\,\varkappa_1^2\varkappa_3 + 4\,\varkappa_1\varkappa_2^2 - \varkappa_1\varkappa_4 - \varkappa_2\varkappa_3 + \tfrac{1}{7}\varkappa_5\right), \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

$$g_2 = -\gamma_2\,, \qquad g_4 = 3\,\gamma_2^2 - \gamma_4\,, \ldots \tag{40}$$

zu setzen ist. Die Gleichungen (39) und (40) behalten auch noch ihre Gültigkeit, wenn wir die Koeffizienten $\varkappa_i$ mit k_i und γ_i mit g_i vertauschen. Aus dem Elastizitätsgesetz (28), (29) wird so

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3\,K}\,k(s_0)\,\sigma_0\,, \qquad D' = \frac{1}{2\,G}\,g(t_0^2)\,T' \tag{41), (42}$$

oder, wenn man die mit dem Einheitstenor E multiplizierte erste Gleichung zur zweiten addiert,

$$D = D_0 + D' = \frac{1}{3\,K}\,k(s_0)\,T_0 + \frac{1}{2\,G}\,g(t_0^2)\,T'\,. \tag{43}$$

Für die einzelnen Komponenten von D folgt dann

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{3\,K}\,k(s_0)\,\sigma_0 + \frac{1}{2\,G}\,g(t_0^2)\,(\sigma_x - \sigma_0)\,, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{3\,K}\,k(s_0)\,\sigma_0 + \frac{1}{2\,G}\,g(t_0^2)\,(\sigma_y - \sigma_0)\,, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{3\,K}\,k(s_0)\,\sigma_0 + \frac{1}{2\,G}\,g(t_0^2)\,(\sigma_z - \sigma_0); \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

$$\psi_{xy} = \frac{1}{G}\,g(t_0^2)\,\tau_{xy}\,, \qquad \psi_{yz} = \frac{1}{G}\,g(t_0^2)\,\tau_{yz}\,, \qquad \psi_{zx} = \frac{1}{G}\,g(t_0^2)\,\tau_{zx}\,. \tag{45}$$

Die 15 Gleichungen (9) bis (11) mit (31), (32) oder mit (44), (45) stellen zusammen mit den Definitionsgleichungen (3), (14), (23), (33), (35) für σ_0, ε_0, ψ_0, τ_0, s_0, t_0 das System der 15 partiellen Differentialgleichungen für die je sechs Spannungs- und Verzerrungskomponenten und die drei Verschiebungskomponenten dar. Sie sind, und dies wird sich als die hauptsächliche Schwierigkeit bei ihrer Integration erweisen, nicht mehr linear in den Spannungen und Verzerrungen, wie dies beim *Hooke*schen Gesetz der Fall war.

Wir können die Spannungen aus dem Gleichungssystem eliminieren, indem wir mit den Gleichungen (31) und (32) in die Gleichgewichtsbedingungen (9) eingehen. Es ergibt sich dann

$$\left.\begin{aligned} &3\,K\,\frac{\partial\,\varepsilon_0}{\partial\,x}\left[\varkappa(\varepsilon_0) + \frac{d\,\varkappa(\varepsilon_0)}{d\,\varepsilon_0}\,\varepsilon_0\right] + 2\,G\left[\gamma(\psi_0^2)\left(\frac{\partial\,\varepsilon_x'}{\partial\,x} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial\,\psi_{xy}}{\partial\,y} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial\,\psi_{zx}}{\partial\,z}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{d\,\gamma(\psi_0{}^2)}{d\,\psi_0{}^2}\left(\frac{\partial\,\psi_0{}^2}{\partial\,x}\,\varepsilon_x' + \frac{1}{2}\,\frac{\partial\,\psi_0{}^2}{\partial\,y}\,\psi_{xy} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial\,\psi_0{}^2}{\partial\,z}\,\psi_{zx}\right)\right] + X = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

und zyklisch weiter. Würden wir hier noch für die Verzerrungsgrößen die partiellen Ableitungen der Komponenten u, v, w des Verschiebungsvektors $\mathfrak{s}$ einführen, so hätten wir das System von 15 Gleichungen auf ein System von drei partiellen Differentialgleichungen für u, v, w zurückgeführt, wie dies in der linearen Elastizitätstheorie üblich ist. Dieses Vorgehen empfiehlt sich in unserem Fall jedoch nicht, da — besonders infolge der komplizierten Gestalt, welche die Invariante ψ_0^2 annimmt, wenn man sie in den Ableitungen der Verschiebungskomponenten darstellt — diese Gleichungen zu umständlich und für die praktische Anwendung ungeeignet werden.

7. Die Formänderungsarbeit. Um die verschiedenen Darstellungen der Formänderungsarbeit A je Volumeneinheit herzuleiten, gehen wir aus von den Gleichungen (26) für die Ableitungen der Volumenänderungsarbeit A_0 nach J_1 und der Gestaltsänderungsarbeit A' nach J_2'. Sie lauten, wenn wir in ihnen gemäß (14) und (23) J_1 durch ε_0 und J_2' durch ψ_0^2 ersetzen,

$$\frac{d\,A_0}{d\,\varepsilon_0} = 9\,K\,\varepsilon_0\,\varkappa(\varepsilon_0)\,, \qquad \frac{d\,A'}{d\,\psi_0{}^2} = \frac{3}{4}\,G\,\gamma(\psi_0^2),$$

woraus durch Integration folgt

$$A_0(\varepsilon_0) = 9\,K\int_0^{\varepsilon_0}\varepsilon\,\varkappa(\varepsilon)\,d\,\varepsilon\,, \qquad A'(\psi_0^2) = \frac{3}{4}\,G\int_0^{\psi_0^2}\gamma(\psi^2)\,d\,\psi^2 \tag{47}$$

oder, wenn wir $\varkappa(\varepsilon)$ und $\gamma(\psi^2)$ nach (27) als Potenzreihen einsetzen und die Integrationen ausführen,

$$A_0(\varepsilon_0) = 9K\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon_0^2 + \tfrac{1}{3}\varkappa_1\varepsilon_0^3 + \tfrac{1}{4}\varkappa_2\varepsilon_0^4 + \cdots\right) = \frac{9}{2}K\varepsilon_0^2\left[1 + 2\left(\tfrac{1}{3}\varkappa_1\varepsilon_0 + \tfrac{1}{4}\varkappa_2\varepsilon_0^2 + \cdots\right)\right],$$

$$A'(\psi_0^2) = \frac{3}{4}G\left(\psi_0^2 + \tfrac{1}{2}\gamma_2\psi_0^4 + \tfrac{1}{3}\gamma_4\psi_0^6 + \cdots\right) = \frac{3}{4}G\psi_0^2\left[1 + 2\left(\tfrac{1}{4}\gamma_2\psi_0^2 + \tfrac{1}{6}\gamma_4\psi_0^4 + \cdots\right)\right].$$

Die gesamte Formänderungsarbeit je Volumeneinheit ist dann

$$A(\varepsilon_0, \psi_0^2) = A_0(\varepsilon_0) + A'(\psi_0^2).$$

Die Arbeit A läßt sich aber auch in den Spannungsgrößen σ_0 und τ_0 bzw. s_0 und t_0 darstellen. Wegen (36) und (37) wird ja

$$A_0(s_0) = 9K\int_{s=0}^{s_0} s\,d[sk(s)] = 9K\int_0^{s_0} s\left[k(s) + s\frac{dk(s)}{ds}\right]ds,$$

$$A'(t_0^2) = \frac{3}{2}G\int_{t=0}^{t_0} t\,d[tg(t^2)] = \frac{3}{2}G\int_0^{t_0} t\left[g(t^2) + t\frac{dg(t^2)}{dt}\right]dt$$

oder, wenn wir nach (38) Potenzreihen für $k(s)$ und $g(t^2)$ einführen und integrieren,

$$A_0(s_0) = \frac{9}{2}Ks_0^2\left[1 + 2\left(\tfrac{2}{3}k_1s_0 + \tfrac{3}{4}k_2s_0^2 + \tfrac{4}{5}k_3s_0^3 + \cdots\right)\right],$$

$$A'(t_0^2) = \frac{3}{4}Gt_0^2\left[1 + 2\left(\tfrac{3}{4}g_2t_0^2 + \tfrac{5}{6}g_4t_0^4 + \tfrac{7}{8}g_6t_0^6 + \cdots\right)\right].$$

Hiermit wird die gesamte Formänderungsarbeit je Volumeneinheit

$$A(s_0, t_0^2) = A_0(s_0) + A'(t_0^2).$$

Im Fall eines nichtlinearen Elastizitätsgesetzes liefern die partiellen Ableitungen von A nach den Spannungen $\sigma_x, \ldots, \tau_{xy}, \ldots$ nicht mehr, wie dies beim *Hooke*schen Gesetz der Fall war, die Verzerrungen $\varepsilon_x, \ldots, \psi_{xy}, \ldots$; wir erhalten vielmehr nach elementarer Zwischenrechnung

$$\frac{\partial A}{\partial \sigma_x} = \frac{dA_0}{ds_0}\frac{\partial s_0}{\partial \sigma_x} + \frac{dA'}{dt_0^2}\frac{\partial t_0^2}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{3K}\left[1 + 2k_1s_0 + 3k_2s_0^2 + \cdots\right]\sigma_0 + \frac{1}{2G}\left[1 + 3g_2t_0^2 + \cdots\right](\sigma_x - \sigma_0),$$

und zyklisch weiter, sowie

$$\frac{\partial A}{\partial \tau_{xy}} = \frac{dA'}{dt_0^2}\frac{\partial t_0^2}{\partial \tau_{xy}} = \frac{1}{G}\left[1 + 3g_2t_0^2 + 5g_4t_0^4 + \cdots\right]\tau_{xy},$$

und zyklisch weiter. In den entsprechenden Gleichungen (44) und (45) für die Verzerrungen ε_x und ψ_{xy} stehen an Stelle der eckigen Klammern die Funktionen $k(s_0)$ und $g(t_0^2)$.

8. Einfache exakte Lösungen der Grundgleichungen. Wir wollen uns nun den einfachsten exakten Lösungen der elastischen Grundgleichungen zuwenden. Es liegt auf der Hand, als erste Gruppe die gleichförmigen Spannungszustände zu untersuchen. Ist der Spannungstensor unabhängig von x, y, z, so gilt dies offenbar auch vom Verzerrungstensor und umgekehrt, so daß die Gleichungen (9) für $\mathfrak{R}=0$ und (19) erfüllt sind.

Ein leicht übersehbarer Fall ist der hydrostatische Spannungszustand. Wir setzen hier

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_0, \qquad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$$

Dann wird

$$\sigma_x' = \sigma_y' = \sigma_z' = 0, \qquad \tau_0 = 0.$$

und somit

$$s_0 = \frac{\sigma_0}{3K}, \quad t_0 = 0.$$

Die Verzerrungen werden dann nach (44) und (45)

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{\sigma_0}{3K}k(s_0), \qquad \psi_{xy} = \psi_{yz} = \psi_{zx} = 0; \tag{48}$$

wir erhalten also, wie dies schon in Ziff. 5 anläßlich der Formulierung der dritten Forderung zum Ausdruck gebracht worden ist, eine gestaltstreue Verzerrung. Umgekehrt folgt natürlich auch aus (48), daß nach (31)

$$\sigma_0 = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 3K\varkappa(\varepsilon_0)\varepsilon_0, \qquad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

sein muß.

Als nächsten Fall behandeln wir den eindimensionalen Zug-Druckversuch (in x-Richtung), indem wir

$$\sigma_x = \sigma\,, \qquad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

setzen, so daß

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\,\sigma\,, \qquad \sigma_x' = \frac{2}{3}\,\sigma\,, \qquad \sigma_y' = \sigma_z' = -\frac{1}{3}\,\sigma \tag{49}$$

und nach (33)

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\sigma\,, \tag{50}$$

also

$$s_0 = \frac{\sigma}{9K}\,, \qquad t_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\frac{\sigma}{G}$$

wird. Dann erhält man für die Dehnung in Zugrichtung

$$\varepsilon_x = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3K}\,k\left(\frac{\sigma}{9K}\right) + \frac{1}{G}\,g\left(\frac{2\sigma^2}{9G^2}\right)\right]\sigma\,, \tag{51}$$

und für die Querdehnungen

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3K}\,k\left(\frac{\sigma}{9K}\right) - \frac{1}{2G}\,g\left(\frac{2\sigma^2}{9G^2}\right)\right]\sigma\,, \tag{52}$$

während die Scherungen ψ_{xy}, ψ_{yz} und ψ_{zx} verschwinden. Das Querdehnungsverhältnis m wird hier eine Funktion von σ, nämlich

$$m(\sigma) = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = -\frac{\dfrac{1}{3K}\,k\left(\dfrac{\sigma}{9K}\right) + \dfrac{1}{G}\,g\left(\dfrac{2\sigma^2}{9G^2}\right)}{\dfrac{1}{3K}\,k\left(\dfrac{\sigma}{9K}\right) - \dfrac{1}{2G}\,g\left(\dfrac{2\sigma^2}{9G^2}\right)}\,. \tag{53}$$

Das Gegenstück hierzu bildet der Fall des in eine starre Vertiefung eingepreßten Zylinders, dessen Achse zur x-Achse parallel sei. Hier ist anzusetzen

$$\varepsilon_x = \varepsilon\,, \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_z = \psi_{xy} = \psi_{yz} = \psi_{zx} = 0\,,$$

also

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}\,\varepsilon\,, \qquad \varepsilon_x' = \frac{2}{3}\,\varepsilon\,, \qquad \varepsilon_y' = \varepsilon_z' = -\frac{1}{3}\,\varepsilon$$

und nach (23)

$$\psi_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,\varepsilon\,.$$

Für die Spannung in Richtung der Zylinderachse erhält man dann nach (31)

$$\sigma_x = \left[K\varkappa\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) + \frac{4}{3}\,G\gamma\left(\frac{8}{9}\,\varepsilon^2\right)\right]\varepsilon$$

und für die Spannungen, die auf den Zylindermantel wirken,

$$\sigma_y = \sigma_z = \left[K\varkappa\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) - \frac{2}{3}\,G\gamma\left(\frac{8}{9}\,\varepsilon^2\right)\right]\varepsilon\,.$$

Der maximale Betrag der Schubspannung wird so

$$|\tau|_{\max} = \frac{1}{2}\,|\sigma_x - \sigma_y| = G\gamma\left(\frac{8}{9}\,\varepsilon^2\right)\cdot|\varepsilon|\,.$$

Auch die Überlagerung einer hydrostatischen Spannung $\bar{\sigma}$ mit einer (etwa in der x-Richtung wirkenden) einachsigen Zug- oder Druckbeanspruchung σ läßt sich einfach behandeln. Es ist hier anzusetzen:

$$\sigma_x = \sigma + \bar{\sigma}\,, \qquad \sigma_y = \bar{\sigma}\,, \qquad \sigma_z = \bar{\sigma}\,, \qquad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0\,.$$

So wird

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\,(\sigma + 3\bar{\sigma})$$

und, wie beim einachsigen Zug-Druck-Versuch,

$$\sigma_x' = \frac{2}{3}\,\sigma\,, \qquad \sigma_y' = \sigma_z' = -\frac{1}{3}\,\sigma\,, \qquad \tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\sigma\,,$$

so daß die Gleichungen für die Dehnungen die Form

$$\varepsilon_x = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3K}\,k\left(\frac{\sigma+3\bar{\sigma}}{9K}\right)(\sigma+3\bar{\sigma}) + \frac{1}{G}\,g\left(\frac{2\sigma^2}{9G^2}\right)\sigma\right], \tag{54}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3K}\,k\left(\frac{\sigma+3\bar{\sigma}}{9K}\right)(\sigma+3\bar{\sigma}) - \frac{1}{2G}\,g\left(\frac{2\sigma^2}{9G^2}\right)\sigma\right] \tag{55}$$

annehmen, während die Scherungen wiederum verschwinden.

Die reine Schubbeanspruchung mit

$$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0\,,\qquad \tau_{xy}=\tau$$

ergibt

$$\sigma_0=0\,,\qquad \tau_0=\sqrt{\frac{2}{3}}\,\tau\,,$$

also

$$s_0=0\,,\qquad t_0=\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{\tau}{G}\,.$$

Dann werden die Verzerrungen

$$\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z=\psi_{yz}=\psi_{zx}=0\,,\qquad \psi_{xy}=\frac{1}{G}\,g\left(\frac{2}{3}\,\frac{\tau^2}{G^2}\right)\tau;$$

wir erhalten also eine volumentreue Verformung.

Drehen wir die x- und die y-Achse um 45° um die z-Achse, so nehmen mit $|\tau|=|\sigma|$ bekanntlich die Spannungen die Werte an

$$\sigma_x=\sigma,\qquad \sigma_y=-\sigma,\qquad \sigma_z=\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0\,,$$

so daß

$$\sigma_0=0\,,\qquad \tau_0=\sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma\,,$$

also

$$s_0=0\,,\qquad t_0=\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{\sigma}{G}$$

wird. Die Verzerrungen werden jetzt

$$\varepsilon_x=-\varepsilon_y=\frac{1}{2G}\,g\left(\frac{2}{3}\,\frac{\sigma^2}{G^2}\right)\sigma,\qquad \varepsilon_z=\psi_{xy}=\psi_{yz}=\psi_{zx}=0\,.$$

Der einfachste ungleichförmige Verzerrungszustand, der sich in geschlossener Form behandeln läßt, ist die Torsion eines Zylinders mit kreis- oder kreisringförmigem Querschnitt vom Außenhalbmesser a und vom Innenhalbmesser $b\geqq 0$. Wir versuchen den in der linearen Theorie üblichen Ansatz für die Verzerrungen, der die Verträglichkeitsbedingungen (19) erfüllt, nämlich

$$\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z=\psi_{xy}=0\,,\qquad \psi_{yz}=\omega x\,,\qquad \psi_{zx}=-\omega y\,, \tag{56}$$

und setzen zur Abkürzung

$$\psi(r)=\omega r\quad\text{mit}\quad r^2=x^2+y^2\,. \tag{57}$$

Hierbei bedeutet ω den Verdrillungswinkel je Längeneinheit des Zylinders. Es wird dann

$$\varepsilon_0=0\,,\qquad \psi_0^2=\frac{2}{3}\,\omega^2 r^2=\frac{2}{3}\,[\psi(r)]^2\,. \tag{58}$$

So erhalten wir für die Spannungen

$$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\tau_{xy}=0;\quad \tau_{yz}=G\gamma\left(\frac{2}{3}\,\omega^2 r^2\right)\omega x,\quad \tau_{zx}=-G\gamma\left(\frac{2}{3}\,\omega^2 r^2\right)\omega y\,. \tag{59}$$

Sie erfüllen, wie man leicht nachprüfen kann, die Gleichgewichtsbedingungen (9), wodurch der Ansatz (56) gerechtfertigt wird.

Die resultierende Schubspannung in der Querschnittsebene

$$\tau(r)=\sqrt{\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2}=G\gamma\left(\frac{2}{3}\,\omega^2 r^2\right)\omega r=G\gamma\left(\frac{2}{3}\,\omega^2 r^2\right)\psi(r) \tag{60}$$

hat somit stets tangentiale Richtung. Sie braucht jedoch nicht unbedingt, wie dies bei der linearen Theorie der Fall ist, ihren Größtwert für $r=a$ anzunehmen. Da jetzt nach (33)

$$\tau_0^2=\frac{2}{3}\,\tau^2$$

wird, folgt aus der Umkehrung der Beziehung (60) nach (37) offenbar

$$\psi(r)=\frac{1}{G}\,g\left(\frac{2}{3}\,\frac{\tau^2}{G^2}\right)\tau(r)\,. \tag{61}$$

Das Moment M, das den Zylinder verdrillt, wird

$$M=2\pi\int_b^a\tau(r)\,r^2\,dr=2\pi G\omega\int_b^a\gamma\left(\frac{2}{3}\,\omega^2 r^2\right)r^3\,dr=\frac{9\pi}{4}\,\frac{G}{\omega^3}\int_{\frac{2}{3}\omega^2 b^2}^{\frac{2}{3}\omega^2 a^2}\gamma(\xi)\,\xi\,d\xi\,.$$

Benützen wir gemäß (27) die Reihenentwicklung

$$\gamma(\xi) = 1 + \gamma_2 \xi + \gamma_4 \xi^2 + \cdots,$$

so erhalten wir für M die Potenzreihe

$$M(\omega) = G\omega\,(J_{p0} + J_{p2}\omega^2\gamma_2 + J_{p4}\omega^4\gamma_4 + J_{p6}\omega^6\gamma_6 + \cdots), \tag{62}$$

wobei

$$J_{p0} = \frac{\pi}{2}(a^4 - b^4) \tag{63}$$

das polare Flächenträgheitsmoment des Zylinderquerschnittes bedeutet und die übrigen Koeffizienten folgende Werte haben:

$$J_{p2} = \frac{2}{9}\pi(a^6 - b^6), \quad J_{p4} = \frac{1}{9}\pi(a^8 - b^8), \quad J_{p6} = \frac{8}{135}\pi(a^{10} - b^{10}), \ldots. \tag{64}$$

Wir wollen auch die im Zylinder von der Länge Eins aufgespeicherte Formänderungsarbeit $\bar{A}$ berechnen. Da sie eine reine Gestaltsänderungsarbeit ist, erhalten wir sie nach (47) in der Form

$$\bar{A} = \int_b^a A'(\psi_0^2) \cdot 2\pi r\,dr = \frac{3\pi}{4} G \int_{r^2=b^2}^{a^2} \int_{\psi_0^2=0}^{\psi_0^2} \gamma(\psi_0^2) d\psi_0^2\, dr^2$$

oder, da das Verdrillungsmoment $M(\omega)$ schon berechnet ist, hier auch durch das Integral

$$\bar{A} = \int_0^\omega M(\omega)\,d\omega.$$

In beiden Fällen wird, wenn wir wieder die Reihenentwicklungen für $\gamma(\psi_0^2)$ bzw. für $M(\omega)$ benützen und die Integrationen ausführen,

$$\bar{A}(\omega) = \frac{1}{2} G\omega^2 \left[J_{p0} + \frac{1}{2} J_{p2}\omega^2\gamma_2 + \frac{1}{3} J_{p4}\omega^4\gamma_4 + \frac{1}{4} J_{p6}\omega^6\gamma_6 + \cdots \right].$$

Haben wir insbesondere einen Zylinder, dessen Wandstärke h klein ist im Verhältnis zu seinem mittleren Halbmesser R, so können wir die Veränderlichkeit von $\tau(r)$ unberücksichtigt lassen und das Moment ansetzen zu

$$M = 2\pi R^2 h\,\tau(R) = 2\pi R^3 h G\gamma\left(\frac{2}{3}\omega^2 R^2\right)\omega$$

oder, wenn wir hier $J_{p0} = 2\pi R^3 h$ nehmen,

$$M = G J_{p0}\gamma\left(\frac{2}{3}\omega^2 R^2\right)\omega.$$

Die Umkehrung dieser Beziehung lautet dann

$$\omega = \frac{M}{G J_{p0}}\, g\left(\frac{2}{3}\frac{R^2 M^2}{G^2 J_{p0}^2}\right).$$

Bei Messungen wird man i. a. den Zusammenhang zwischen M und ω direkt bestimmen. Bei Vollstäben läßt sich aber nach einer bekannten Formel[1], deren Richtigkeit man auch an Hand der Darstellung (62) bis (64) für M und (60) für $\tau(r)$ leicht unmittelbar nachprüfen kann und die bei jedem beliebigen Elastizitätsgesetz anwendbar ist, die Spannung τ_a am Rand des Zylinderquerschnitts als Funktion von ω berechnen. Die Formel lautet

$$\tau_a = \frac{1}{2\pi a^3}\left(\omega\frac{dM}{d\omega} + 3M\right). \tag{65}$$

9. Experimentelle Bestimmung des Elastizitätsgesetzes. Um für einen bestimmten Stoff das Elastizitätsgesetz angeben zu können, ist der Wert der Konstanten K und G sowie der Verlauf der Funktionen $\varkappa(\varepsilon_0)$ und $\gamma(\psi_0^2)$ oder $k(s_0)$ und $g(t_0^2)$ experimentell in Grundversuchen zu ermitteln. Als solche eignen sich in erster Linie diejenigen, bei deren rechnerischer Auswertung jeweils nur die eine der beiden zu bestimmenden Funktionen auftritt, also Versuche, bei denen die einzelnen Elemente des Versuchskörpers allein ihr Volumen oder allein ihre Gestalt ändern. Man kommt, wenn man auf Kontrollen verzichtet, mit zwei Versuchen aus, bei denen jeweils der Zusammenhang einer maßgebenden Spannungsgröße mit einer einzigen Verformungsgröße zu ermitteln ist. Jeder der beiden Versuche liefert dann den Verlauf einer der beiden Funktionen $\varkappa(\varepsilon_0)$ und $\gamma(\psi_0^2)$ bzw. $k(s_0)$ und $g(t_0^2)$ sowie den Wert einer der beiden Konstanten K und G.

[1] *A. Nádai*, Der bildsame Zustand der Werkstoffe. Berlin 1927, S. 91.

Von den in der vorigen Ziffer behandelten Spannungszuständen kämen demnach hier zunächst einerseits ein hydrostatischer Zug-Druck-Versuch zur Bestimmung von K und $\varkappa(\varepsilon_0)$ oder $k(s_0)$ und andererseits ein reiner Schubversuch zur Bestimmung von G und $\gamma(\psi_0^2)$ oder $g(t_0^2)$ in Betracht.

Die Versuchstechnik für Kompressionsmessungen bei hydrostatischem Druck ist sehr gut ausgebildet, und es liegen zahlreiche Ergebnisse vor[1]. Die Funktionen $\varkappa(\varepsilon_0)$ und $k(s_0)$ werden sich somit für negative Werte von ε_0 und s_0 durch solche Versuche leicht ermitteln lassen. Für positive ε_0 und s_0 ist dies jedoch auf einem entsprechenden Weg kaum möglich, da Versuche mit allseitig gleichförmigem Zug bis heute technisch nicht befriedigend durchführbar sind.

Ebenfalls schwierig ist es, an plattenförmigen Körpern reine Schubversuche anzustellen, sei es, daß man den rechteckigen Versuchskörper an seinen Rändern auf Schub oder auf Zug und gleich großen Druck entsprechend den beiden in der vorigen Ziffer behandelten Spannungszuständen beansprucht. Hier bietet jedoch der Torsionsversuch mit dünnwandigen kreiszylindrischen Rohren, der ja ebenfalls eine (wenigstens annähernd) gleichförmige reine Schubbeanspruchung erzeugt und sich verhältnismäßig leicht ausführen läßt, einen guten Ersatz. Natürlich kann man auch aus einem Torsionsversuch mit einem massiven Rundstab G und $\gamma(\psi_0^2)$ oder $g(t_0^2)$ bestimmen; die Auswertung eines solchen Versuchs ist jedoch etwas mühsamer als beim dünnwandigen Rohr.

Ist auf Grund des hydrostatischen Druckversuchs K und $\varkappa(\varepsilon_0)$ für $\varepsilon_0 \leqq 0$ oder $k(s_0)$ für $s_0 \leqq 0$ und dazu mit Hilfe des Torsionsversuchs G und $\gamma(\psi_0^2)$ oder $g(t_0^2)$ bekannt, so benötigt man noch einen weiteren Versuch, um die Funktionen $\varkappa(\varepsilon_0)$ für $\varepsilon_0 > 0$ oder $k(s_0)$ für $s_0 > 0$ zu bestimmen. Hierzu eignet sich am besten ein einachsiger Zugversuch, bei dem es genügt, die Dehnung ε_x als Funktion der Zugspannung zu ermitteln. Nach (51) ergibt sich dabei die Funktion $k(s_0)$ mit Hilfe der schon bekannten Funktion $g(t_0^2)$ und hieraus schließlich auch $\varkappa(\varepsilon_0)$.

Es sei hier ausdrücklich darauf hingewiesen, daß der übliche eindimensionale Zug-Druck-Versuch mit Messung von $\varepsilon_x(\sigma)$ allein ohne Bestimmung der Querdehnung über das elastische Verhalten des Körpers unter einer anderen als der Versuchsbeanspruchung überhaupt noch keine Aussage ermöglicht. Wird jedoch die Querdehnung ε_y als Funktion der Spannung mitgemessen, so läßt sich sowohl K und $k(s_0)$ als auch G und $g(t_0^2)$ auf Grund der aus (51) und (52) herleitbaren Beziehungen

$$k\left(\frac{\sigma}{9K}\right) = \frac{3K}{\sigma}(\varepsilon_x + 2\varepsilon_y)\,, \tag{66}$$

$$g\left(\frac{2\sigma^2}{9G^2}\right) = \frac{2G}{\sigma}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \tag{67}$$

ermitteln. Aus (67) folgt hierbei ein wichtiges Kriterium dafür, ob das untersuchte Material überhaupt ein Elastizitätsgesetz in der hier entwickelten Form befolgt: Da g eine gerade Funktion von σ ist, muß notwendig $\varepsilon_x - \varepsilon_y$ eine ungerade Funktion von σ werden. Physikalisch bedeutet ja dies, daß dann der volumentreue Anteil des Verformungsvorganges beim Zug-Druck-Versuch unabhängig davon ist, ob man das Material dabei zusätzlich einer positiven oder einer gleich großen negativen hydrostatischen Spannung $\sigma/3$ aussetzt. Da die dritte Forderung von Ziff. 5 völlige Unabhängigkeit der beiden Verformungsanteile voneinander verlangt, ist die Tatsache, daß $\varepsilon_x - \varepsilon_y$ eine ungerade Funktion von σ ist, natürlich nur eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit unseres Elastizitätsgesetzes. (Es wäre übrigens einer näheren experimentellen Untersuchung wert, festzustellen, ob nicht auch die *v. Mises*sche Fließbedingung, aus deren sinngemäßer Erweiterung ins elastische Gebiet sich ja die dritte Forderung von Ziff. 5 ergeben hat, nur bei solchen Stoffen befriedigend erfüllt ist, für welche $\varepsilon_x - \varepsilon_y$ beim Zug-Druck-Versuch eine ungerade Funktion der Spannung ist.)

Ergänzt man, wie dies z. B. *Roš* und *Eichinger*[2] tun, den eindimensionalen Zug-Druck-Versuch mit der Spannung σ durch weitere Zug-Druck-Versuche unter zusätzlichem hydrostatischem Überdruck $\bar{\sigma}$, so muß, wenn unser Elastizitätsgesetz befolgt wird, wie aus (54) und (55) hervorgeht, der Wert der Differenz $\varepsilon_x - \varepsilon_y$ der gleiche bleiben wie beim Versuch ohne Überdruck unter gleicher Zugspannung σ; d. h. der Überdruck $\bar{\sigma}$ darf wohl den Wert der Dehnungen ε_x und ε_y ändern, nicht aber den der Differenz von beiden.

Drei Beispiele mögen zeigen, wie man praktisch aus Versuchsergebnissen die Werte von K und G sowie den Verlauf der Kompressions- und der Schubfunktion gewinnen kann.

---

[1] Literaturangaben bei *F. Auerbach* und *W. Hort*, Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, Bd. III. Leipzig 1927, S. 113.

[2] Siehe Fußnote 3 auf Seite 455.

a) Mit massiven Rundstäben aus Aluminiumbronze wurde ein Zug- und ein Druckversuch je mit Messung der Längsdehnung ε_x allein sowie ein Torsionsversuch ausgeführt. Hierbei erhielt man folgende Ergebnisse[1].

Zug- und Druckversuch:

$$\begin{aligned} \sigma &= 0 \quad \pm 1000 \quad \pm 2000 \quad \pm 3000 \text{ kg/cm}^2 \\ \varepsilon_x &= 0 \quad \pm 0{,}96 \quad \pm 6{,}25 \quad \pm 36{,}3 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Torsionsversuch (Werte mit Hilfe von (65) ermittelt):

$$\begin{aligned} \tau(a) = \tau_a &= 0 \quad 500 \quad 1000 \quad 1500 \text{ kg/cm}^2 \\ a\omega = \psi_a &= 0 \quad 1{,}19 \quad 5{,}85 \quad 30{,}6 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Wir wollen zuerst die Versuche analytisch auswerten. Hiezu stellen wir ε_x und ψ_a als Polynome in σ und τ_a dar, welche die in der Tabelle angegebenen Werte annehmen. Mit Hilfe des üblichen Differenzenschemas[2] erhalten wir

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \alpha_1\sigma + \alpha_2\sigma^2 + \alpha_3\sigma^3 + \alpha_4\sigma^4 + \alpha_5\sigma^5, \\ \psi_a &= \beta_1\tau_a + \beta_3\tau_a^3 + \beta_5\tau_a^5 \end{aligned}$$

mit den Koeffizienten

$$\alpha_1 = 0{,}78 \cdot 10^{-6}\,\text{cm}^2/\text{kg},\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0{,}049 \cdot 10^{-12}\,\text{cm}^6/\text{kg}^3,\ \alpha_4 = 0,\ \alpha_5 = 0{,}134 \cdot 10^{-18}\,\text{cm}^{10}/\text{kg}^5;$$
$$\beta_1 = 2{,}10 \cdot 10^{-6}\,\text{cm}^2/\text{kg},\ \beta_3 = 0{,}25 \cdot 10^{-12}\,\text{cm}^6/\text{kg}^3,\ \beta_5 = 3{,}50 \cdot 10^{-18}\,\text{cm}^{10}/\text{kg}^5.$$

Da nun nach (61) für $r = a$

$$\psi_a = \frac{1}{G}\, g\left(\frac{2}{3}\frac{\tau_a^2}{G^2}\right)\tau_a = \frac{1}{G}\,\tau_a + g_2\,\frac{2}{3G^3}\,\tau_a^3 + g_4\,\frac{4}{9G^5}\,\tau_a^5 + \cdots$$

sein muß, so folgt durch Vergleich gleicher Potenzen von τ_a

$$G = \frac{1}{\beta_1},\quad g_2 = \frac{3}{2}\,G^3\beta_3,\quad g_4 = \frac{9}{4}\,G^5\beta_5,\quad g_6 = g_8 = \cdots = 0, \tag{68}$$

oder in Zahlen

$$G = 0{,}477 \cdot 10^6\ \text{kg/cm}^2,\quad g_2 = 0{,}040 \cdot 10^6,\quad g_4 = 0{,}195 \cdot 10^{12}.$$

Die Funktion $g(t_0^2)$ wird so

$$g(t_0^2) = 1 + 0{,}040 \cdot 10^6\, t_0^2 + 0{,}195 \cdot 10^{12}\, t_0^4.$$

Aus dem Zug-Druck-Versuch kann man jetzt die Funktion $k(s_0)$ und K ermitteln. Wir benützen dazu die Gleichung (51), die, nach $k\left(\frac{\sigma}{9K}\right)$ aufgelöst, lautet

$$k\left(\frac{\sigma}{9K}\right) = 3K\left[\frac{3\varepsilon_x}{\sigma} - \frac{1}{G}\,g\left(\frac{2\sigma^2}{9G^2}\right)\right].$$

Führt man hier für k, g und ε_x die Reihen bzw. Polynomdarstellungen ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &1 + k_1\frac{\sigma}{9K} + k_2\left(\frac{\sigma}{9K}\right)^2 + k_3\left(\frac{\sigma}{9K}\right)^3 + k_4\left(\frac{\sigma}{9K}\right)^4 + \cdots \\ &\quad = 3K\left\{3(\alpha_1 + \alpha_2\sigma + \alpha_3\sigma^2 + \alpha_4\sigma^3 + \alpha_5\sigma^4) - \frac{1}{G}\left[1 + g_2\,\frac{2\sigma^2}{9G^2} + g_4\left(\frac{2\sigma^2}{9G^2}\right)^2\right]\right\}. \end{aligned}$$

Durch Vergleich der Koeffizienten gleicher Potenzen von σ folgt hieraus, wenn man noch die Beziehungen (68) berücksichtigt,

$$K = \frac{1}{3}\,\frac{1}{3\alpha_1 - \frac{1}{G}} = \frac{1}{3\alpha_1 - \beta_1}, \tag{69}$$

$$k_1 = (9K)^2\alpha_2,\ k_2 = (9K)^3\left(\alpha_3 - \tfrac{1}{9}\beta_3\right),\ k_3 = (9K)^4\alpha_4,\ k_4 = (9K)^5\left(\alpha_5 - \tfrac{1}{27}\beta_5\right),\ k_5 = k_6 = \cdots = 0. \tag{70}$$

In Zahlen wird somit hier

$$K = 1{,}35 \cdot 10^6\ \text{kg/cm}^2,\quad k_1 = 0,\quad k_2 = 38{,}0 \cdot 10^6,\quad k_3 = 0,\quad k_4 = 120{,}4 \cdot 10^{12},$$

so daß $k(s_0)$ die Form

$$k(s_0) = 1 + 38{,}0 \cdot 10^6 s_0^2 + 120{,}4 \cdot 10^{12} s_0^4$$

annimmt.

---

[1] Nach Diagrammen von *M. Roš* und *A. Eichinger*, Diskussionsbericht der Eidg. Materialprüfungsanstalt in Zürich, Nr. 34 (1929).

[2] Siehe z. B. *G. Schulz*, Formelsammlung zur praktischen Mathematik. Berlin und Leipzig 1937, S. 67.

Versucht man mit Hilfe der Umkehrung der Formeln (39) und (40) die Koeffizienten $\varkappa_i$ und γ_i der Potenzreihendarstellung der Funktionen $\varkappa(\varepsilon_0)$ und $\gamma(\psi_0^2)$ zu gewinnen, so zeigt es sich, daß diese Reihen nur in sehr engen Bereichen von ε_0 und ψ_0^2 gut konvergieren, weshalb sie für praktische Zwecke kaum brauchbar sein dürften.

Es wird daher nützlich sein, wenn wir dem soeben gezeigten analytischen auch noch ein graphisches Auswertungsverfahren zur Seite stellen, das jetzt beschrieben werden soll.

Wir gehen aus von einem Diagramm des Torsionsversuches, in dem τ_a in Abhängigkeit von ψ_a eingetragen wird (Abb. 1). Die Skalen für ψ_a und τ_a ersetzen wir zufolge der Beziehungen

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi_a = 0{,}816\,\psi_a\,, \qquad \tau_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\tau_a = 0{,}816\,\tau_a\,,$$

die sich nach (58) und (33) für die Werte von ψ_0 und τ_0 an der Oberfläche des Stabes ergeben, durch ψ_0 und τ_0. Die Ursprungstangente möge die Gerade $\psi_0 = c$, wobei c eine willkürlich in geeigneter Größe wählbare positive Konstante ist, im Punkte A schneiden. Dann ist die τ_0-Ordinate von A gleich cG. (Im Beispiel ist $c = 10^{-3}$ gewählt; dann wird $cG = 477\ \mathrm{kg/cm^2}$.) Wir zeichnen nun auf der Ordinatenachse eine γ- und auf der Abszissenachse eine g-Skala ein, wobei die Einheit für γ durch die Ordinatenstrecke und die Einheit für g durch die Abszissenstrecke des Punktes A darzustellen ist. Außerdem tragen wir auf der Ordinatenachse eine t_0-Skala auf, deren Einheit wegen $t_0 = \tau_0/G$ gleich der mit c dividierten Ordinatenstrecke von A ist. (Im Beispiel entspricht somit diese Ordinatenstrecke selbst 10^{-3} Einheiten von t_0.)

Um nun zu einem beliebigen Punkt P des Torsionsdiagrammes den Punkt Q der Kurve $\gamma(\psi_0^2)$ mit der Abszisse ψ_0 und der Ordinate γ und den Punkt $\bar{Q}$ der Kurve $g(t_0^2)$ mit der Ordinate t_0 und der Abszisse g zu erhalten, zeichnen wir den Ursprungstrahl OP, der die Ordinatenparallele durch A in R und die Abszissenparallele durch A in $\bar{R}$ schneiden möge. Der Punkt Q hat dann die Abszisse von P und die Ordinate von R, während der Punkt $\bar{Q}$ die Abszisse von $\bar{R}$ und die Ordinate von P hat. Der Beweis für die Richtigkeit dieser Konstruktion ergibt sich leicht mit Hilfe des Strahlensatzes, wenn man berücksichtigt, daß die Abszisse t_0 von P nach (36) gleich $\psi_0\gamma(\psi_0^2)$ und die Ordinate ψ_0 von P nach (37) gleich $t_0 g(t_0^2)$ sein muß. Man konstruiert so die Kurven $\gamma(\psi_0^2)$ und $g(t_0^2)$ punktweise, wobei zu beachten ist, daß die erstere die Gerade $\gamma = 1$ für $\psi_0 = 0$ und die letztere die Gerade $g = 1$ für $t_0 = 0$ berührt.

Diese Methode zur Konstruktion der Kurven für γ und g aus dem (γ_0, τ_0)-Diagramm läßt sich sinngemäß übertragen auf die Konstruktion der Kurven für $\varkappa$ und k aus dem $(\varepsilon_0, \sigma_0)$-Diagramm; hierbei ist lediglich ψ_0 durch ε_0, τ_0 durch σ_0, t_0 durch s_0 und G durch $3K$ zu ersetzen.

Um nun aber im vorliegenden Beispiel das $(\varepsilon_0, \sigma_0)$-Diagramm zu erhalten, benötigen wir außer dem Diagramm des Torsionsversuchs noch das Zug-Druck-Diagramm (Abb. 2). Das erstere können wir dabei in den Maßstabsverhältnissen unverändert übernehmen, wenn wir zur Eintragung des Zug-Druck-Diagramms eine σ-Skala benützen, deren Einheit ($1\ \mathrm{kg/cm^2}$) die gleiche Länge hat, durch welche der Wert $\tau_0 = \frac{1}{3}\sqrt{2}\ \mathrm{kg/cm^2} = 0{,}4714\ \mathrm{kg/cm^2}$ auf der τ_0-Achse dargestellt wird, und ebenso eine ε_x-Skala, deren Einheit der Länge entspricht, durch welche $\sqrt{2}$ Einheiten der ψ_0-Skala dargestellt werden. Das Torsionsdiagramm bedeutet in diesem (ε_x, σ)-System dann den Ausdruck

$$\frac{1}{3G}\, g\left(\frac{2\sigma^2}{9G^2}\right)\sigma\,,$$

der, von $\varepsilon_x(\sigma)$ abgezogen, gemäß (51) die Funktion

$$\frac{\sigma}{9K}\, k\left(\frac{\sigma}{9K}\right) = \varepsilon_x(\sigma) - \frac{1}{3G}\, g\left(\frac{2\sigma^2}{9G^2}\right)\sigma$$

liefert. Das Kurvenbild dieser Funktion läßt sich aber jetzt direkt als Darstellung von $\sigma_0(\varepsilon_0)$ verwenden, wenn wir die ε_x-Achse als ε_0-Achse mit der gleichen Skala benützen und die σ-Skala gemäß $\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma$ durch eine Skala für σ_0 ersetzen, auf der $1\ \mathrm{kg/cm^2}$ durch diejenige Strecke dargestellt wird, welche $3\ \mathrm{kg/cm^2}$ der σ-Skala entspricht. Man hat also lediglich nach Einführung der Skalen für σ, σ_0, ε_x und ε_0 noch die Zug-Druck-Kurve $\sigma(\varepsilon_x)$ einzuzeichnen und von deren Abszissenstrecken diejenigen des Torsionsdiagramms, die zur gleichen Ordinatenhöhe gehören, abzuziehen. Die so entstehende neue Kurve stellt dann in den entsprechenden Skalen direkt das $(\varepsilon_0, \sigma_0)$-Diagramm dar.

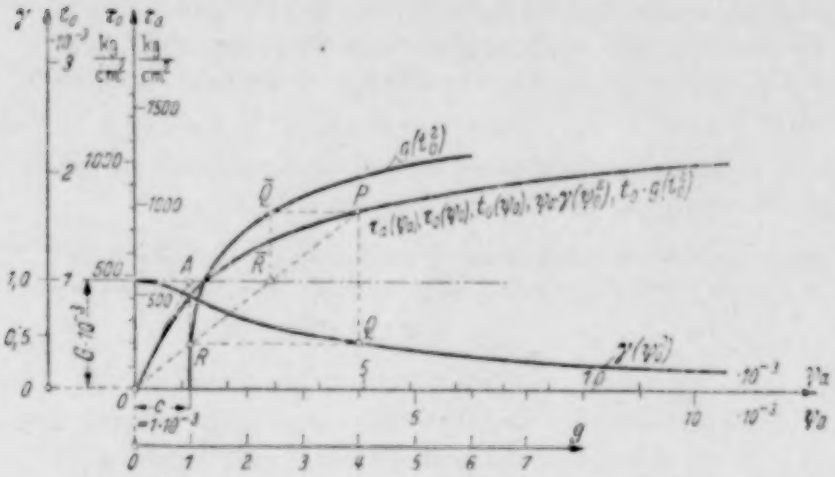

Abb. 1. Aluminiumbronze. Torsionsversuch.
Bestimmung von Scherungs- und Schubfunktion.

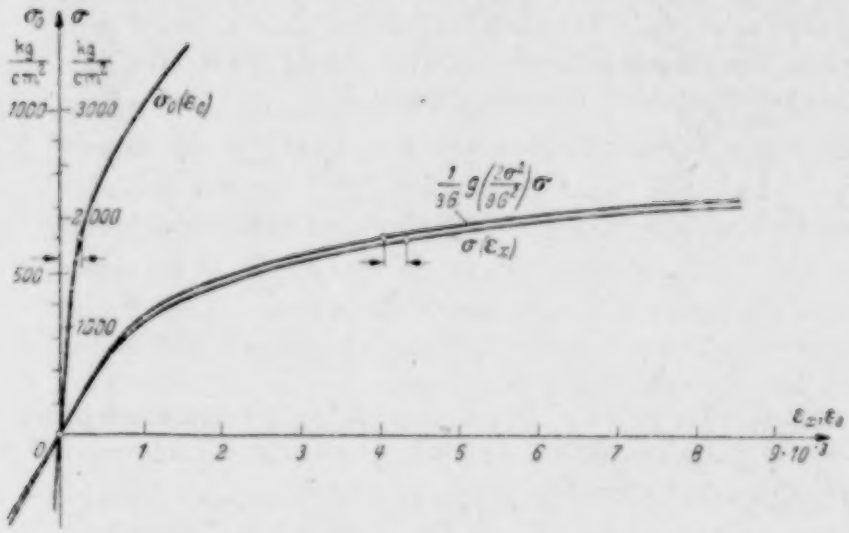

Abb. 2. Aluminiumbronze. Torsions- und Zug-Druck-Versuch.
Bestimmung der Funktion $\sigma_0(\varepsilon_0)$.

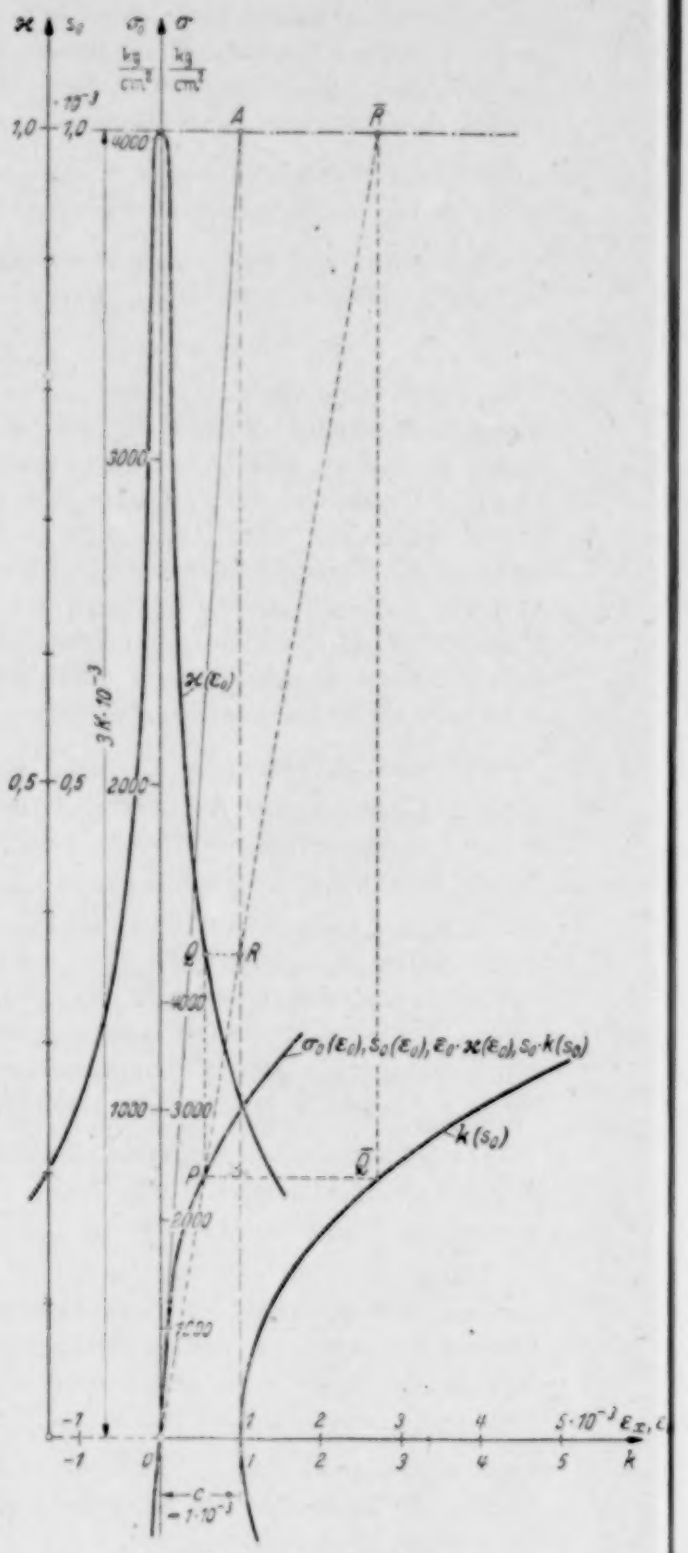

Abb. 3. Aluminiumbronze.
Bestimmung von Dehnungs- und Kompressionsfunktion.

In Abb. 3 wurden nun hieraus die Diagramme für $\varkappa(\varepsilon_0)$ und $k(s_0)$ konstruiert, wobei das Konstruktionsverfahren, wie schon oben erwähnt, ganz analog zu dem der Abb. 1 verläuft. Die Abb. 1, 2 und 3 sind nur der Übersichtlichkeit wegen getrennt gezeichnet; bei der praktischen Durchführung des graphischen Verfahrens kann man gut mit einer einzigen Zeichnung auskommen.

Da die Beträge der Dehnungen im vorliegenden Beispiel bei Zug und bei gleich großem Druck übereinstimmen, wurde die Darstellung der Funktionen $\varkappa$ und k für negative Werte von ε_0 und s_0 nur angedeutet. Beide Kurven sind hier symmetrisch zur Ordinaten- bzw. Abszissenachse.

b) An Stäben aus Siemens-Martin-Stahl haben *Roš* und *Eichinger*[1] bei den üblichen Zug- und Druckversuchen die Längsdehnung ε_x und die Querdehnung ε_y gemessen, wobei sich folgende Werte ergaben

σ =	+2000	+1000	−1000	−2000 kg/cm²
ε_x =	+0,964	+0,416	−0,408	−0,912 · 10^{-3}
ε_y =	−0,254	−0,108	+0,132	+0,268 · 10^{-3}
$\varepsilon_x - \varepsilon_y$ =	+1,218	+0,524	−0,540	−1,180 · 10^{-3}.

[1] *M. Roš* und *A. Eichinger*, Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr. Zürich 1926, S. 21, Abb. 12.

Die noch nicht befriedigende Übereinstimmung der Beträge von $\varepsilon_x-\varepsilon_y$ für gleich große Zug- und Druckspannugen läßt sich aus dem Diagramm von *Roš* und *Eichinger* dadurch erklären, daß die Dehnungswerte nicht auf den spannungsfreien, sondern auf den mit ungefähr 160 kg/cm² (beim Zugversuch) bzw. mit ungefähr 100 kg/cm² (beim Druckversuch) vorgespannten Versuchskörper bezogen sind. Berücksichtigt man dies und verteilt sodann die noch verbleibenden kleinen Differenzen entsprechender Beträge von $\varepsilon_x-\varepsilon_y$ gleichmäßig auf die Meßergebnisse, so erhält man die folgenden verbesserten Versuchswerte

$$\begin{aligned}
\sigma &= +2000 \quad +1000 \quad 0 \quad -1000 \quad -2000 \text{ kg/cm}^2\\
\varepsilon_x &= +1{,}000 \quad +0{,}468 \quad 0 \quad -0{,}445 \quad -0{,}977 \cdot 10^{-3}\\
\varepsilon_y &= -0{,}264 \quad -0{,}121 \quad 0 \quad +0{,}144 \quad +0{,}287 \cdot 10^{-3}\\
\varepsilon_x-\varepsilon_y &= +1{,}264 \quad +0{,}589 \quad 0 \quad -0{,}589 \quad -1{,}264 \cdot 10^{-3}.
\end{aligned}$$

Man stellt nun im Blick auf die Gleichungen (66) und (67) die Ausdrücke $\varepsilon_x+2\varepsilon_y$ und $\varepsilon_x-\varepsilon_y$ als Polynome in der Form

$$\varepsilon_y+2\varepsilon_y = a_1\sigma+a_2\sigma^2+a_3\sigma^3+a_4\sigma^4, \qquad \varepsilon_x-\varepsilon_y = b_1\sigma+b_2\sigma^3 \tag{71}$$

dar. Hierbei werden die Zahlwerte der Koeffizienten

$$\begin{aligned}
a_1 &= +0{,}183 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}, \quad a_2 = +0{,}0425 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^4/\text{kg}^2,\\
a_3 &= +0{,}009 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^6/\text{kg}^3, \quad a_4 = -0{,}0085 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^8/\text{kg}^4;\\
b_1 &= +0{,}5747 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}; \quad b_2 = +0{,}0143 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^6/\text{kg}^3.
\end{aligned}$$

Andererseits ist nach (66) und (67)

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x+2\varepsilon_y &= \frac{\sigma}{3K}\,k\left(\frac{\sigma}{9K}\right) = \frac{\sigma}{3K}+3k_1\left(\frac{\sigma}{9K}\right)^2+3k_2\left(\frac{\sigma}{9K}\right)^3+3k_3\left(\frac{\sigma}{9K}\right)^4+\cdots,\\
\varepsilon_x-\varepsilon_y &= \frac{\sigma}{2G}\,g\left(\frac{2\sigma^2}{9G^2}\right) = \frac{\sigma}{2G}+g_2\frac{\sigma^3}{9G^3}+\cdots,
\end{aligned}\right\} \tag{72}$$

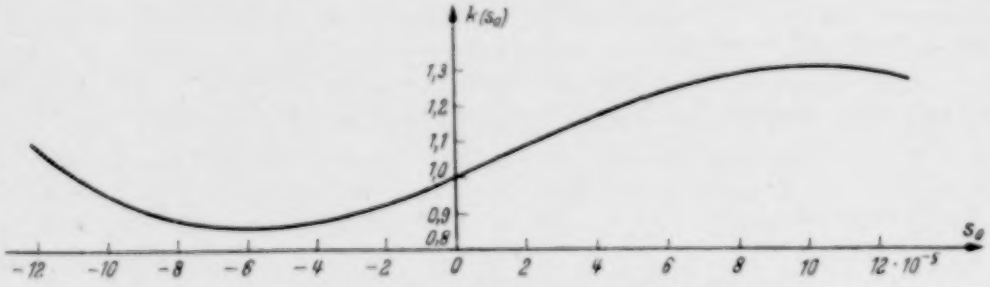

Abb. 4. Siemens-Martin-Stahl. Kompressionsfunktion.

so daß der Vergleich derselben Potenzen von σ in (71) und (72) die folgenden Gleichungen zur Bestimmung des Kompressions- und des Schubmoduls sowie der Koeffizienten der Reihenentwicklung von Kompressions- und Schubfunktion liefert:

$$K = \frac{1}{3a_1}, \quad k_1 = 27a_2K^2 = 3\frac{a_2}{a_1^3}, \qquad k_2 = 243a_3K^3 = 9\frac{a_3}{a_1^5},$$

$$k_3 = 2187a_4K^4 = 27\frac{a_4}{a_1^4}, \quad k_5 = k_6 = \cdots = 0;$$

$$G = \frac{1}{2b_1}, \quad g_2 = 9b_2G^3 = \frac{9}{8}\frac{b_2}{b_1^3}, \quad g_4 = g_6 = \cdots = 0.$$

Die Zahlenwerte dieser Konstanten werden hier

$$\begin{aligned}
K &= 1{,}821 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2, \quad k_1 = 3{,}807 \cdot 10^3,\\
k_2 &= 13{,}22 \cdot 10^6, \qquad\qquad k_3 = -204{,}6 \cdot 10^9;\\
G &= 0{,}870 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2, \quad g_2 = 0{,}085 \cdot 10^6;
\end{aligned}$$

die Kompressionsfunktion wird daher durch das Polynom

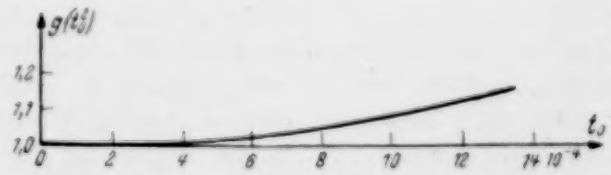

Abb. 5. Siemens-Martin-Stahl. Schubfunktion.

$$k(s_0) = 1+3{,}807 \cdot 10^3 s_0+13{,}22 \cdot 10^6 s_0^2-204{,}6 \cdot 10^9 s_0^3$$

und die Schubfunktion durch das Polynom

$$g(t_0^2) = 1+0{,}085 \cdot 10^6 t_0^2$$

dargestellt. Die beiden Funktionen sind (jeweils innerhalb des Versuchsbereichs) in den Abb. 4 und 5 eingezeichnet.

c) Vom Kupfer ist bekannt, daß es — wie zahlreiche andere Metalle — beim hydrostatischen Druckversuch ein lineares Gesetz befolgt, so daß man die Kompressionsfunktion $k(s_0)$ für negative Werte von s_0 konstant gleich Eins setzen kann. Der Wert des Kompressionsmoduls wird hierbei $K = 1{,}33 \cdot 10^6$ kg/cm². Zur Bestimmung der Schubfunktion $g(t_0^2)$ und der Kompressionsfunktion $k(s_0)$ für positive Werte von s_0 steht noch ein Torsionsversuch an einem massiven Rundstab mit folgenden Ergebnissen[1]

$$\tau_a = \quad 0 \quad 100 \quad 200 \text{ kg/cm}^2$$
$$\psi_a = \quad 0 \quad 0{,}26 \quad 0{,}80 \cdot 10^{-3}$$

sowie ein Zugversuch[2] zur Verfügung, bei dem eine Spannung $\sigma = 490$ kg/cm² eine Längsdehnung $\varepsilon_x = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ zur Folge hatte.

Die Scherung ψ_a läßt sich in Abhängigkeit von der Schubspannung τ_a durch ein Polynom

$$\psi_a = \beta_1 \tau_a + \beta_3 \tau_a^3$$

darstellen, dessen Koeffizienten sich zu

$$\beta_1 = 2{,}13 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kg}, \qquad \beta_3 = 46{,}7 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^6/\text{kg}^3$$

ergeben. Nach (68) wird dann der Schubmodul

$$G = \frac{1}{\beta_1} = 0{,}470 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

und der einzige nicht verschwindende Koeffizient der Schubfunktion

$$g_2 = \frac{3}{2} G^3 \beta_3 = 7{,}26 \cdot 10^6 ,$$

also diese selbst (Abb. 6)

$$g(t_0^2) = 1 + 7{,}26 \cdot 10^6 t_0^2 .$$

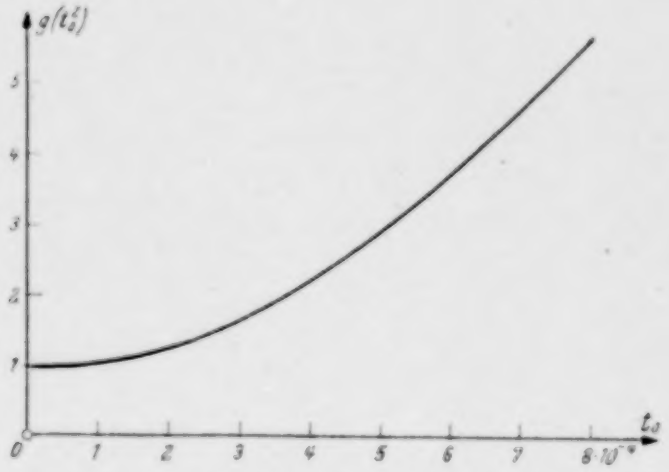

Abb. 6. Kupfer. Schubfunktion.

Um nun auch den Zugversuch durch ein Polynom von der Form

$$\varepsilon_x = \alpha_1 \sigma + \alpha_3 \sigma^3$$

darzustellen, bestimmen wir zunächst α_1, das sich aus der Gleichung (69) zu

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K} + \beta_1\right),$$

hier mit dem Wert $\alpha_1 = 0{,}793 \cdot 10^{-6}$ cm²/kg errechnet. Der Koeffizient α_3 folgt dann aus der Forderung, daß das Polynom für ε_x bei dem oben angegebenen Zugspannungswert den durch Versuch ermittelten Längsdehnungswert liefern muß, zu $\alpha_3 = 5{,}20 \cdot 10^{-12}$ cm⁶/kg³. Somit werden nach (70) die Koeffizienten der Kompressionsfunktion $k(s_0)$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 11{,}97^3 (5{,}20 - 5{,}19) \cdot 10^6, \quad k_3 = k_4 = \cdots = 0.$$

Man sieht, daß k_2 innerhalb der Versuchsgenauigkeit ohne Bedenken gleich Null angenommen werden kann; man darf demnach auch für positive Werte von s_0 die Kompressionsfunktion $k(s_0)$ konstant gleich Eins setzen.

10. Elastizitätsgesetze von Bach-Schüle, Grübler und Schlechtweg. Wir wollen untersuchen, inwieweit die mathematischen Ausdrücke, die *Bach-Schüle*, *Grübler* und *Schlechtweg*[3] aufgestellt haben, um das experimentell ermittelte elastische Verhalten von festen Körpern zu beschreiben, als Spezialfälle unseres allgemeinen Elastizitätsgesetzes aufzufassen sind.

Bach und *Schüle* benützten, wie schon in der Einleitung erwähnt, für ihre Zug-Druck-Versuche die Formel

$$\varepsilon_x = \alpha \sigma^m$$

mit den Materialkonstanten α und m. Es ist sofort zu erkennen, daß dieses Gesetz unserer vierten Forderung (Ziff. 5) außer in dem trivialen Fall $m = 1$ nicht genügen und somit auch nicht ein Spezialfall unseres Zug-Druck-Gesetzes (51) sein kann.

---

[1] Siehe Fußnote 1 auf Seite 464.
[2] *A. Nádai*, a. a. O. S. 56, Abb. 53.
[3] Siehe Fußnote 1, 3 und 4 auf Seite 450.

Der von *Grübler* zunächst für den Zug-Druck-Versuch benützte und ebenfalls in der Einleitung erwähnte „hyperbolische" Ansatz lautet in unserer Schreibweise, nach der Längsdehnung aufgelöst,

$$\varepsilon_x = \frac{A\sigma}{1 - B\sigma}$$

oder, in eine geometrische Reihe entwickelt,

$$\varepsilon_x = A\sigma(1 + B\sigma + B^2\sigma^2 + \cdots),$$

wobei A und B Materialkonstanten sind. Er stellt also tatsächlich einen Spezialfall unserer allgemeinen Formel (51) dar, aus der sich jedoch natürlich nicht die hier zugrunde liegende Kompressions- und Schubfunktion in eindeutiger Weise ermitteln lassen; denn dazu wäre ja, wie wir gesehen haben, außer dem Zug-Druck-Versuch noch mindestens ein weiterer Versuch nötig.

Die Verallgemeinerung des *Grüblers*chen Elastizitätsgesetzes in der Form

$$D_{ik} = \frac{A\,T_{ik}}{1 - B\,T_{ik}},$$

wobei D_{ik} und T_{ik} entsprechende Komponenten des Verzerrungstensors D (12) und des Spannungstensors T (1) sind, läßt sich jedoch mit der von uns benützten allgemeinen Form (30), die man sich ebenfalls in Komponenten geschrieben denken mag, nicht mehr in Einklang bringen.

Schlechtweg verbesserte diesen Ansatz, indem er statt der Tensorkomponenten Invarianten einführte, und gab ihm schließlich — in unserer Schreibweise — mit den Materialkonstanten B, C und L die Form

$$\varepsilon_0 = s_0, \quad D' = \frac{1}{2}\,\frac{1}{G - 9BKGs_0 - \sqrt{3}\,Ct_0 + 9\sqrt[4]{3}\,LK\sqrt{G s_0}\sqrt{t_0}}\,T', \tag{73}$$

die, wie er nachwies, insbesondere dem Verhalten des Gußeisens gerecht wird. Der Vergleich zeigt, daß zwar Gleichung (41) mit $k(s_0) \equiv 1$ die entsprechende Gleichung des *Schlechtweg*schen Gesetzes liefert — sie stellt ja noch die lineare *Hooke*sche Beziehung dar —, daß aber die zweite Gleichung von *Schlechtweg* sich nicht als Spezialfall von (42) darstellen läßt, da der bei T' stehende Faktor außer t_0 auch noch s_0 enthält. Tatsächlich ist auch bei Gußeisen die Gestaltsänderung von einer überlagerten hydrostatischen Spannung nicht unabhängig, weshalb auch das von uns benützte Elastizitätsgesetz sich für Gußeisen nicht verwenden läßt. Man erkennt dies z. B. an den Ergebnissen der Zug-Druck-Versuche von *Roš* und *Eichinger*, für die das in der vorhergehenden Ziffer genannte Kriterium, wonach $\varepsilon_x - \varepsilon_y$ eine ungerade Funktion von σ sein muß, nicht erfüllt ist.

Jetzt soll noch gezeigt werden, daß schon der (auch von *Schlechtweg* benützte) vereinfachte Ansatz, den man erhält, wenn man die Materialkonstante L in (73) gleich Null setzt, es nicht ermöglicht, einen vom Verformungsweg unabhängigen Ausdruck für die Formänderungsarbeit A je Volumeneinheit aufzustellen (abgesehen natürlich von dem Sonderfall, daß auch noch die Materialkonstante B verschwindet, so daß der Faktor bei T' in (73) eine Funktion von t_0 allein wird und der Ansatz für T' somit zu einem Sonderfall unseres Elastizitätsgesetzes wird).

Eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Funktion A im oben genannten Sinne ist z. B. das Bestehen der folgenden Beziehung

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_y} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_x}; \tag{74}$$

denn beide Seiten der Gleichung stellen ja, wie in Ziff. 7 dargelegt wurde, den Ausdruck

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_x\,\partial \varepsilon_y}$$

dar. Wir weisen nach, daß diese Beziehung beim Ansatz von *Schlechtweg* in der Form

$$\varepsilon_0 = s_0, \quad D' = \frac{1}{2}\,\frac{1}{G - 9BKGs_0 - \sqrt{3}\,Ct_0}\,T' \tag{75), (76}$$

nicht erfüllt ist. Hiezu ist die Gleichung für D' nach T' aufzulösen. Man erhält dann

$$T' = 2(G - 9BKGs_0 - \sqrt{3}\,Ct_0)\,D'. \tag{77}$$

Jetzt sind in dem Faktor von D' die Spannungsgrößen s_0 und t_0 durch Verzerrungsgrößen zu ersetzen. Für s_0 ist dies bereits in (75) geschehen. Um auch für t_0 einen Ausdruck in den Verzerrungs-

größen zu erhalten, bilden wir in (76) beiderseits die zweite Tensorinvariante und erhalten nach kurzer, aus (23), (33) und (35) folgender Zwischenrechnung

$$t_0 = \varphi_0 \psi_0$$

mit der Abkürzung

$$\varphi_0 \equiv \frac{1 - 9BK\varepsilon_0}{1 + \sqrt{3}\frac{C}{G}\psi_0} .$$

So nimmt (77) die Form an

$$T' = 2G\varphi_0 D' ,$$

und es wird

$$\sigma_x = 3K\varepsilon_0 + 2G\varphi_0(\varepsilon_x - \varepsilon_0); \quad \sigma_y = 3K\varepsilon_0 + 2G\varphi_0(\varepsilon_y - \varepsilon_0) .$$

Die Ableitungen in Gleichung (74) werden mit

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \varepsilon_x} = \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \varepsilon_y} = \frac{1}{3} , \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial \varepsilon_x} = \frac{3}{2\psi_0}(\varepsilon_x - \varepsilon_0), \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial \varepsilon_y} = \frac{3}{2\psi_0}(\varepsilon_y - \varepsilon_0)$$

zu

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_y} = K + G\left[\frac{3}{\psi_0}(\varepsilon_x - \varepsilon_0)(\varepsilon_y - \varepsilon_0)\frac{\partial \varphi_0}{\partial \psi_0} - \frac{2}{3}\varphi_0\right] + \frac{2}{3}G(\varepsilon_x - \varepsilon_0)\frac{\partial \varphi_0}{\partial \varepsilon_0} ,$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_x} = K + G\left[\frac{3}{\psi_0}(\varepsilon_y - \varepsilon_0)(\varepsilon_x - \varepsilon_0)\frac{\partial \varphi_0}{\partial \psi_0} - \frac{2}{3}\varphi_0\right] + \frac{2}{3}G(\varepsilon_y - \varepsilon_0)\frac{\partial \varphi_0}{\partial \varepsilon_0} .$$

Gleichung (74) ist für beliebige Werte von ε_x und ε_y somit nur dann erfüllt, wenn $\partial\varphi_0/\partial\varepsilon_0$ verschwindet, d. h. also für $B=0$.

11. Biegung prismatischer Stäbe. Die Biegung prismatischer Stäbe für nichtlineare Elastizitätsgesetze ist schon von *Bach*[1], *Herbert*[2] und *Nádai*[3] untersucht worden. Sämtlichen Untersuchungen werden die Annahmen der technischen Biegelehre zugrundegelegt, die wenigstens hinsichtlich des Ebenbleibens der Stabquerschnitte auch bei Stoffen mit nichtlinearem Elastizitätsgesetz mit genügender Genauigkeit zuzutreffen scheinen[4].

Man wird nun bei den Stoffen, die das hier entwickelte nichtlineare Elastizitätsgesetz befolgen, nach einem Anhaltspunkt suchen, der allein aus der Kenntnis der Kompressions- und der Schubfunktion heraus zu entscheiden gestattet, ob man bei einem bestimmten Material damit rechnen darf, daß die technische Biegelehre in der Form, wie sie von den oben genannten Verfassern für das nichtlineare elastische Verhalten erweitert worden ist, Ergebnisse von ähnlicher Genauigkeit liefern wird wie die gewöhnliche technische Biegelehre bei linearem Elastizitätsgesetz.

Hierbei möge uns folgender Gedankengang leiten: Bekanntlich stehen bei linearem Elastizitätsgesetz die Ergebnisse der technischen Biegelehre im Fall der sog. reinen Biegung (Beanspruchung der Stabendquerschnitte durch freie Momente) mit den Grundgleichungen der Elastizitätstheorie im Einklang. Es ist nun anzunehmen, daß auch bei nicht linearem Elastizitätsgesetz die erweiterte technische Biegelehre dann das gleiche leisten wird wie die gewöhnliche Biegelehre bei linearem Gesetz, wenn auch sie den Fall der reinen Biegung exakt wiedergibt. Wir werden also untersuchen müssen, unter welcher Bedingung für Kompressions- und Schubfunktion ein Spannungszustand als Folge einer reinen Biegebeanspruchung möglich ist, wie ihn die technische Biegelehre für den Fall der reinen Biegung bei nichtlinearem Elastizitätsgesetz annimmt.

Hiezu gehen wir von einem noch allgemeineren Spannungszustand aus, der den Fall der technischen Biegelehre sicher umfaßt; wir setzen nämlich voraus, daß bei fehlenden Volumkräften der Spannungstensor T nur die einzige Komponente $\sigma_x = \sigma$ enthalte, die jedoch zunächst noch von allen drei Ortskoordinaten abhängen darf, und nehmen an

$$\sigma_x = \sigma(x, y, z), \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 , \quad \mathfrak{K} = 0 . \tag{78}$$

Man sieht sofort, daß die Gleichgewichtsbedingungen (9) nur dann erfüllt werden können, wenn $\partial\sigma_x/\partial x$ verschwindet, also σ nur von y und z abhängt. Dann werden mit den schon in (49) und (50) für konstantes σ bestimmten Spannungsgrößen

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma(y, z) , \qquad \tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma(y, z)$$

---

[1] Siehe Fußnote 1 auf Seite 450.
[2] *H. Herbert*, Forsch. Arb. Ing. Wes., Heft 89 (1910).
[3] *A. Nádai*, a. a. O., S. 114.
[4] *C. Bach* und *R. Baumann*, a. a. O., S. 267.

entsprechend (51) und (52) die Verzerrungen

$$\varepsilon_x(y,z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3K}\,k\left(\frac{\sigma}{9K}\right)+\frac{1}{G}\,g\left(\frac{2\sigma^2}{9G^2}\right)\right]\sigma\,, \tag{79}$$

$$\varepsilon_y(y,z) = \varepsilon_z(y,z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3K}\,k\left(\frac{\sigma}{9K}\right)-\frac{1}{2G}\,g\left(\frac{2\sigma^2}{9G^2}\right)\right]\sigma\,, \tag{80}$$

$$\psi_{xy}=\psi_{yz}=\psi_{zx}=0.$$

Diese müssen die Verträglichkeitsbedingungen (19) erfüllen, die sich mit Rücksicht darauf, daß die Dehnungen nicht von x abhängen, auf folgende Gleichungen reduzieren:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}=0\,,\quad \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\,\partial z}=0\,,\quad \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}=0\,,\quad \Delta\varepsilon_y=\Delta\varepsilon_z=0 \text{ mit } \Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

Da sämtliche zweiten Ableitungen von ε_x verschwinden, kann ε_x nur eine lineare Funktion von y und z sein:

$$\varepsilon_x = Ay+Bz+C \quad (A,B,C=\text{konst}). \tag{81}$$

Es gilt also notwendig auch $\Delta\varepsilon_x=0$. Somit müssen die beiden Gleichungen

$$\Delta\varepsilon_x=\frac{d\varepsilon_x}{d\sigma}\Delta\sigma+\frac{d^2\varepsilon_x}{d\sigma^2}\left[\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right)^2\right]=0\,,$$

$$\Delta\varepsilon_y=\frac{d\varepsilon_y}{d\sigma}\Delta\sigma+\frac{d^2\varepsilon_y}{d\sigma^2}\left[\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right)^2\right]=0$$

gleichzeitig erfüllt werden. Dies ist aber nur möglich, wenn entweder

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right)^2=0\,,$$

also $\sigma=$konst und somit der Spannungszustand gleichförmig ist (welcher Fall uns hier nicht mehr interessiert) oder

$$\frac{d\varepsilon_x}{d\sigma}\,\frac{d^2\varepsilon_y}{d\sigma^2}-\frac{d\varepsilon_y}{d\sigma}\,\frac{d^2\varepsilon_x}{d\sigma^2}=0\,,$$

also ε_y eine lineare Funktion von ε_x ist, falls man σ als Parameter für die beiden Veränderlichen ε_x und ε_y auffaßt. Da aber für $\sigma=0$ nach (79) und (80) sowohl ε_x als auch ε_y verschwinden, muß notwendig

$$\varepsilon_y=\text{konst}\cdot\varepsilon_x=-\frac{1}{m_0}\,\varepsilon_x$$

werden, wenn man entsprechend der Querdehnungszahl m in der linearen Theorie auch hier eine Konstante m_0 einführt. Ein Spannungszustand der Form (78) ist also mit nicht konstantem σ höchstens dann möglich, wenn die Querdehnungsfunktion $m(\sigma)$ in (53), die man ja durch einen einfachen Zug-Druck-Versuch auch direkt ermitteln kann, eine Konstante ist.

Wie man aus (53) erkennt, wird aber $m(\sigma)$ nur dann eine Konstante, wenn für alle σ die Funktionen g und k sich höchstens um einen konstanten Faktor unterscheiden, der dann aber nach (38) nur die Zahl Eins sein kann, also wenn

$$k\left(\frac{\sigma}{9K}\right)=g\left(\frac{2\sigma^2}{9G^2}\right)$$

ist. Die Dehnungen werden in diesem Sonderfall

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K}+\frac{1}{G}\right)k\left(\frac{\sigma}{9K}\right)\sigma\,,\\ \varepsilon_y=\varepsilon_z&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K}-\frac{1}{2G}\right)k\left(\frac{\sigma}{9K}\right)\sigma\,,\end{aligned}\right\} \tag{82}$$

und die Gleichung für ε_x lautet, nach σ aufgelöst,

$$\sigma=\frac{9KG}{3K+G}\,\varkappa\left(\frac{G\varepsilon_x}{3K+G}\right)\varepsilon_x\,.$$

Wir werden somit annehmen dürfen, daß die technische Biegelehre bei nichtlinearem Elastizitätsgesetz um so bessere Ergebnisse liefern wird, je geringer die Schwankung der in (53) dargestellten Funktion $m(\sigma)$ innerhalb des in Frage kommenden Bereichs von σ ist. Im allgemeinen wird eine in σ gerade Funktion $m(\sigma)$ dieser Forderung wenigstens für kleine Werte von σ besser gerecht werden als eine ungerade, die man dann erhält, wenn k in σ lineare Glieder oder, was das gleiche bedeutet, ε_x in σ quadratische Glieder aufweist, falls man sich die rechte Seite von (82) nach Potenzen von σ entwickelt denkt.

Für Aluminiumbronze nach Beispiel a) von Ziff. 9 erhält man etwa den in Abb. 7 dargestellten Verlauf von $m(\sigma)$. Hier kann man für $|\sigma| < 1000$ kg/cm² noch gut mit einem konstanten Mittelwert 2,95 für m rechnen.

Nun wollen wir zeigen, wie man die exakten Differentialgleichungen für die reine Biegung des prismatischen Stabes bei nichtlinearem Elastizitätsgesetz aufzustellen hat, und sodann deren Integration für eine besonders einfache Form dieses Gesetzes näherungsweise durchführen. Wir gehen von der Annahme aus (deren Richtigkeit sich erst am Schluß der Untersuchung erweisen wird), daß sämtliche Spannungsgrößen von der Abszisse x (in Richtung der Stabachse) unabhängig sind und die Schubspannungen τ_{xy}, τ_{zx} (und somit auch die Scherungen ψ_{xy}, ψ_{zx}) verschwinden. Wir setzen also die Spannungen an

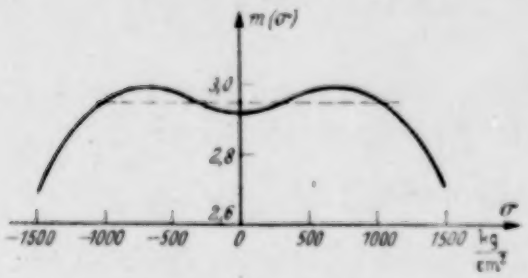

Abb. 7. Aluminiumbronze. Querdehnungszahl als Funktion der Zugspannung.

$$\sigma_x(y,z), \quad \sigma_y(y,z), \quad \sigma_z(y,z), \quad \tau_{yz}(y,z), \quad \tau_{xy} = \tau_{zx} = 0. \tag{83}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen (9) werden bei fehlender Volumkraft sämtliche befriedigt, wenn wir σ_y, σ_z und τ_{yz} aus einer Spannungsfunktion $F(y,z)$ in der Form

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial z} \tag{84}$$

herleiten. Wir erhalten dann nach (3), (33) und (35)

$$s_0 = \frac{1}{9K}(\sigma_x + \Delta F), \tag{85}$$

$$t_0^2 = \frac{1}{3G^2}\left[\sigma_x^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)^2 - \frac{1}{3}(\sigma_x + \Delta F)^2\right]. \tag{86}$$

Greift im Fall der reinen Biegung an den Stabendflächen Q ein freies Moment M an, dessen Vektor die Richtung der y-Achse haben möge, so verlangt man bekanntlich, daß

$$\iint_Q \sigma_x\, dy\, dz = 0, \quad \iint_Q \sigma_x y\, dy\, dz = 0, \quad \iint_Q \sigma_x z\, dy\, dz = M \qquad (87), (88), (89)$$

wird. Außerdem muß die Mantelfläche des Stabes spannungsfrei sein; d. h. es muß dort gelten, falls α der Winkel zwischen der (nach außen weisenden) Flächennormalen und der Richtung der y-Achse ist,

$$\sigma_y \cos\alpha + \tau_{yz} \sin\alpha = 0, \qquad \tau_{yz} \cos\alpha + \sigma_z \sin\alpha = 0.$$

Drückt man diese Forderungen in der Spannungsfunktion $F(y,z)$ aus, so erhält man nach einer Umformung, die völlig analog zu derjenigen verläuft, die für die Spannungsfunktion des ebenen Spannungszustandes für den lastfreien Teil des Randes durchgeführt zu werden pflegt[1], das Ergebnis, daß in den Randpunkten

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\text{Rand}} = \text{konst}, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{\text{Rand}} = \text{konst} \tag{90}$$

sein muß, wobei die Konstanten gleich Null gewählt werden dürfen. Wenn wir nun mit (84) bis (86) in die Gleichungen (44) und (45) für die Verzerrungen eingehen, so stellen sich diese als Funktionen von σ_x und den zweiten Ableitungen von $F(y,z)$ dar; sie können also ebenfalls nicht die Veränderliche x enthalten. Mit Rücksicht hierauf sowie auf das Verschwinden der Scherungen ψ_{xy} und ψ_{zx} reduzieren sich die von den Verzerrungen zu erfüllenden Verträglichkeitsbedingungen (19) auf

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\, \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi_{yz}}{\partial y\, \partial z}. \tag{91}$$

Die ersten drei Gleichungen verlangen wieder, daß ε_x eine lineare Funktion von y und z sein muß, also wie in (81)

$$\varepsilon_x = Ay + Bz + C \qquad (A, B, C = \text{konst}). \tag{92}$$

In den Spannungen ausgedrückt, liefert dies eine Beziehung zwischen A, B, C, σ_x und den zweiten Ableitungen von F, welche die Form

$$f_1\left(\sigma_x; \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial z}, \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right) = Ay + Bz + C \tag{93}$$

[1] Siehe z. B. *L. Föppl*, Drang und Zwang, 3. Bd. München 1947, S. 13.

annehmen wird. Die vierte Verträglichkeitsbedingung (91) ergibt, wenn man sie in den Spannungen ausdrückt, eine partielle Differentialgleichung, welche die Ableitungen von $F(y,z)$ bis zur vierten und die von σ_x bis zur zweiten Ordnung enthält, von der Form

$$f_2\left(\sigma_x;\ \frac{\partial\sigma_x}{\partial y},\ \frac{\partial\sigma_x}{\partial z};\quad \frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2},\ldots;\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\ldots;\ \frac{\partial^3 F}{\partial y^3},\ldots;\ \frac{\partial^4 F}{\partial y^4},\ldots\right)=0\,. \tag{94}$$

Grundsätzlich könnte man nun σ_x und seine Ableitungen aus (93) und (94) eliminieren und erhielte so eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung für $F(y,z)$, die y, z und die zweiten, dritten und vierten Ableitungen von $F(y,z)$ enthält; ihre Lösung, in der noch die Konstanten A, B und C stehen, ist dann so zu bestimmen, daß sie die Randbedingungen (90) befriedigt. Hierdurch sind i. a. die zweiten Ableitungen von $F(y,z)$ als Funktionen von y und z eindeutig festgelegt. Geht man hiermit in (93) ein, so erhält man σ_x als Funktion von y und z sowie den drei Konstanten A, B und C. Diese reichen nunmehr gerade noch aus, um die Bedingungen (87) bis (89) zu befriedigen, und somit erweist sich unsere Annahme (83), von der wir ausgegangen sind, als gerechtfertigt. Hierbei können sich noch sämtliche drei Konstanten A, B und C verändern, wenn man den Wert von M variiert, und dies bedeutet praktisch, daß Lage und Richtung der neutralen Achse $Ay+Bz+C=0$ vom Wert von M abhängt.

Wir erkennen also aus dieser allgemeinen Untersuchung, daß im Fall der reinen Biegung bei nichtlinearem Elastizitätsgesetz mit folgenden, in allen Stabquerschnitten gleichen Spannungen zu rechnen ist: Normalspannungen σ_x (auf Ebenen senkrecht zur Balkenachse) sowie Normalspannungen σ_y, σ_z und Schubspannungen τ_{yz} (auf Ebenen parallel zur Balkenachse), die sämtliche nicht mehr linear verlaufen werden. Dabei treten dann folgende, ebenfalls von der Abszisse x der Stabachse unabhängige Verzerrungen auf: Eine linear über den Querschnitt verlaufende Dehnung ε_x in Achsrichtung des Stabes sowie Querdehnungen ε_y und ε_z, die aber nicht mehr proportional zu ε_x sind und daher Scherungen ψ_{yz} zur Folge haben.

Die Auflösung des Gleichungssystems (93), (94) und die Anpassung der Lösung an die Randbedingungen stößt bei willkürlich vorgegebenen Kompressions- und Schubfunktionen $k(s_0)$ und $g(t_0^2)$ auf große mathematische Schwierigkeiten. Wir wollen daher die Aufgabe vereinfachen und uns auf den praktisch häufigen Sonderfall beschränken (wie er auch etwa in Ziff. 9, Beispiel c, auftritt), daß $k(s_0)\equiv 1$ und $g(t_0^2)$ in der Form

$$g(t_0^2)=1+\lambda t_0^2 \qquad (\lambda=\text{konst})$$

darstellbar ist. Die Konstante λ wird also hier identisch mit g_2. Dabei sei noch zusätzlich angenommen, daß $g(t_0^2)$ nur wenig vom Wert Eins abweicht, d. h. daß Glieder von der Größenordnung $(\lambda t_0^2)^2$ gegenüber solchen von der Größenordnung λt_0^2 vernachlässigt werden dürfen.

Es ist nun zu erwarten, daß auch die Spannung σ_x und die Spannungsfunktion $F(x,y)$ nur wenig von den bekannten Werten abweichen werden, die sie bei linearem Elastizitätsgesetz annehmen. Diese sind aber $F(y,z)\equiv 0$ und, wenn wir voraussetzen, daß die y-Achse Hauptträgheitsachse des Stabquerschnittes Q ist, $\sigma_x=\beta z$, wobei

$$\beta=\frac{M}{J}$$

ist, falls

$$J=\iint\limits_Q z^2\,dQ$$

das achsiale Flächenträgheitsmoment des Querschnitts bezüglich der y-Achse bedeutet. Wir setzen daher mit noch unbekannten Funktionen $\chi(y,z)$ und $f(y,z)$ an

$$\sigma_x=\beta z+\lambda\chi(y,z)\,,\qquad F(y,z)=\lambda f(y,z)\,, \tag{95), (96}$$

so daß

$$\sigma_y=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,,\quad \sigma_z=\lambda\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,,\quad \tau_{yz}=-\lambda\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\,,\quad \tau_{zx}=\tau_{xy}=0 \tag{97}$$

wird. Hierbei sollen dann wiederum die Quadrate der mit λ behafteten Korrektionsglieder gegenüber den ersten Potenzen vernachlässigt werden. Führt man die Rechnung unter diesem Gesichtspunkt aus, so wird aus (85) und (86)

$$s_0=\frac{1}{9K}\left[\beta z+\lambda(\chi+\Delta f)\right],\qquad t_0^2=\frac{2}{9G^2}\,\beta z\left[\beta z+\lambda(2\chi+\Delta f)\right].$$

Nach den Grundgleichungen (44) und (45) werden dann die Verzerrungen

$$\varepsilon_x = \frac{1}{9K}\left[\beta z+\lambda(\chi+\Delta f)\right]+\frac{1}{6G}\left[2\beta z+\lambda\left(2\chi-\Delta f+\frac{4}{9G^2}\beta^3 z^3\right)\right], \tag{98}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{9K}\left[\beta z+\lambda(\chi+\Delta f)\right]+\frac{1}{6G}\left[-\beta z+\lambda\left(3\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}-\chi-\Delta f-\frac{2}{9G^2}\beta^3 z^3\right)\right], \tag{99}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{9K}\left[\beta z+\lambda(\chi+\Delta f)\right]+\frac{1}{6G}\left[-\beta z+\lambda\left(3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\chi-\Delta f-\frac{2}{9G^2}\beta^3 z^3\right)\right], \tag{100}$$

$$\psi_{yz} = -\frac{\lambda}{G}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}, \qquad \psi_{zx}=\psi_{xy}=0. \tag{101}$$

Da der Wert von ε_x bei *Hooke*schem Elastizitätsgesetz sich zu

$$\varepsilon_{x0} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{G}+\frac{1}{3K}\right)\beta z$$

ergibt, empfiehlt sich hier für ε_x der wegen (92) in y und z lineare Ansatz

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0}+\lambda(ay+bz+c)$$

mit den Konstanten a, b und c. Mit ihm wird aus (98)

$$\left(\frac{1}{G}+\frac{1}{3K}\right)\chi-\left(\frac{1}{2G}-\frac{1}{3K}\right)\Delta f+\frac{2}{9G^3}\beta^3 z^3 = 3(ay+bz+c). \tag{102}$$

Ebenso wird mit (99) bis (101) aus der Verträglichkeitsbedingung (91) nach einiger Umformung die Gleichung

$$-\left(\frac{1}{2G}-\frac{1}{3K}\right)\Delta\chi+\left(\frac{1}{G}+\frac{1}{3K}\right)\Delta\Delta f-\frac{2}{3G^3}\beta^3 z = 0. \tag{103}$$

Um die Funktion χ aus (102) und (103) zu eliminieren, wenden wir auf (102) die Δ-Operation an und erhalten

$$\left(\frac{1}{G}+\frac{1}{3K}\right)\Delta\chi-\left(\frac{1}{2G}-\frac{1}{3K}\right)\Delta\Delta f+\frac{4}{3G^3}\beta^3 z = 0; \tag{104}$$

eliminiert man jetzt $\Delta\chi$ aus (103) und (104), so ergibt sich für $f(y,z)$ die Differentialgleichung

$$\Delta\Delta f = \frac{8\beta^3}{3G(3K+4G)}z, \tag{105}$$

deren Lösung die aus (90) folgenden Bedingungen

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\text{Rand}} = 0, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\text{Rand}} = 0 \tag{106}$$

erfüllen muß.

Hat man die Lösung (105) gefunden, so ist σ_y, σ_z und τ_{yz} nach (97) berechenbar. Die Funktion $\chi(y,z)$, die man zur Bestimmung von σ_x benötigt, folgt aus (102) zu

$$\chi(y,z) = \frac{3KG}{3K+G}\left[\left(\frac{1}{2G}-\frac{1}{3K}\right)\Delta f-\frac{2}{9G^3}\beta^3 z^3+3(ay+bz+c)\right]. \tag{107}$$

Zur Bestimmung der drei Konstanten a, b, c stehen jetzt noch die drei Forderungen (87) bis (89) für σ_x zur Verfügung, die sich für $\chi(y,z)$ in der Form

$$\iint_Q \chi(y,z)\,dy\,dz=0, \quad \iint_Q \chi(y,z)y\,dy\,dz=0, \quad \iint_Q \chi(y,z)z\,dy\,dz=0 \quad (108),(109),(110)$$

ausdrücken.

Als Anwendung behandeln wir die Biegung eines zylindrischen Stabes mit elliptischem Querschnitt, dessen Rand durch die Gleichung

$$y^2+\vartheta^2 z^2-r^2 = 0$$

mit beliebigem r und beliebigem $\vartheta \neq 0$ bestimmt ist. Die Lösung der Gleichung (105) mit den Randbedingungen (106) läßt sich in diesem Fall leicht erraten; sie ist

$$f(y,z) = Cz(y^2+\vartheta^2 z^2-r^2)^2$$

mit einer noch zu bestimmenden Konstanten C. Die ersten Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4Cyz(y^2+\vartheta^2 z^2-r^2), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = C(y^2+5\vartheta^2 z^2-r^2)(y^2+\vartheta^2 z^2-r^2)$$

verschwinden offensichtlich auf dem Ellipsenrand. Die Spannungen werden dann nach (97)

$$\sigma_y = \lambda C z \cdot 4\vartheta^2(3y^2+5\vartheta^2 z^2-3r^2), \quad \sigma_z = \lambda C z \cdot 4(3y^2+\vartheta^2 z^2-r^2),$$
$$\tau_{yz} = -\lambda C y \cdot 4(y^2+3\vartheta^2 z^2-r^2),$$

und es wird

$$\Delta f = 4Cz\,[3(1+\vartheta^2)y^2+\vartheta^2(1+5\vartheta^2)z^2-(1+3\vartheta^2)r^2] \tag{111}$$

sowie

$$\Delta\Delta f = 24C(1+2\vartheta^2+5\vartheta^4)z,$$

so daß man, um (105) zu befriedigen,

$$C = \frac{\beta^3}{9(1+2\vartheta^2+5\vartheta^4)G(3K+4G)} \tag{112}$$

zu setzen hat. Nach (107) wird dann

$$\chi(y,z) = \frac{27G^3K(ay+bz+c)+6G^2(3K-2G)Cz\,[3(1+\vartheta^2)y^2+\vartheta^2(1+5\vartheta^2)z^2-(1+3\vartheta^2)r^2]-2K\beta^3z^3}{3G^2(3K+G)}; \tag{113}$$

hierbei sind noch die Konstanten a, b und c zu bestimmen.

Aus Symmetriegründen muß nun beim elliptischen Querschnitt σ_x eine gerade Funktion von y sein, woraus sich nach (95) dasselbe auch für $\chi(y,z)$ ergibt. Da gemäß (111) Δf in y gerade ist, kann aber, wie Gleichung (107) zeigt, $\chi(y,z)$ nur dann in y gerade sein, wenn a verschwindet, was zur Folge hat, daß dann Gleichung (109) erfüllt wird. Nunmehr ist $\chi(y,z)$ nach (113) als Summe aus einer in z ungeraden Funktion und einer Konstanten, welche c als Faktor enthält, darstellbar. Bei der in (108) verlangten Integration kann somit wegen der Symmetrieeigenschaften des Ellipsenquerschnitts der Integralwert nur dann verschwinden, wenn auch die Konstante c zu Null wird. Um die noch fehlende Konstante b zu bestimmen, steht die Gleichung (110) zur Verfügung, die sich nach (113) mit $a=c=0$ auch in der Form

$$\int_{z=-r/\vartheta}^{+r/\vartheta}\ \int_{y=-\sqrt{r^2-\vartheta^2z^2}}^{+\sqrt{r^2-\vartheta^2z^2}} \{27G^3Kbz+6G^2(3K-2G)Cz[3(1+\vartheta^2)y^2+\vartheta^2(1+5\vartheta^2)z^2-(1+3\vartheta^2)r^2]- -2K\beta^3z^3\}\,z\,dy\,dz = 0$$

schreiben läßt. Die Auswertung dieses Integrals für den Ellipsenquerschnitt gibt, wenn man den Wert von C nach (112) einsetzt, für b die Gleichung

$$b = \frac{\beta^3 r^2}{27G^3\vartheta^2}.$$

Geht man mit diesem Wert in die Gleichung (113) für χ ein, so erhält man nach (95) für die Längsspannung

$$\sigma_x = \beta z+\lambda C z(C_1y^2-C_2z^2+C_3r^2),$$

wobei die Koeffizienten C_1, C_2, C_3 die Werte

$$C_1 = 6\,\frac{(1+\vartheta^2)(3K-2G)}{3K+G},$$

$$C_2 = 2\,\frac{9(1+2\vartheta^2+5\vartheta^4)K^2+3(4+7\vartheta^2+15\vartheta^4)KG+2(1+5\vartheta^2)\vartheta^2G^2}{G(3K+G)},$$

$$C_3 = \frac{9(1+2\vartheta^2+5\vartheta^4)K^2+6(2+3\vartheta^2+7\vartheta^4)KG+4(1+3\vartheta^2)\vartheta^2G^2}{\vartheta^2G(3K+G)}$$

haben.

Da $\beta = M/J$ proportional dem Biegemoment ist, wird der Faktor C nach (112) proportional der dritten Potenz des Biegemoments, und dasselbe gilt somit von den mit dem Faktor λC behafteten Änderungen sämtlicher Spannungen sowie vom Faktor b, der ja die Änderung der Krümmung der (sich in einen Kreisbogen verformenden) Mittelfaser $y=z=0$ bedeutet, die wegen $c=0$ nach wie vor die Eigenschaft besitzt, daß ihre Punkte spannungsfrei bleiben.

Im Spezialfall einer kreisrunden Welle vom Halbmesser r wird mit $\vartheta=1$ und $J=\frac{\pi}{4}r^4$

$$C = \frac{1}{72}\,\frac{M^3}{J^3}\,\frac{1}{G(3K+4G)};$$

$$\sigma_x = \frac{M}{J}z-\lambda C z\cdot 4\,\frac{-3G(3K-2G)y^2+3(12K^2+13KG+2G^2)z^2-2(9K^2+9KG+2G^2)r^2}{G(3K+G)}, \tag{114}$$

$$\sigma_y = \lambda C z\cdot 4(3y^2+5z^2-3r^2),$$

$$\sigma_z = \lambda C z\cdot 4(3y^2+z^2-r^2),$$

$$\tau_{yz} = -\lambda C y\cdot 4(y^2+3z^2-r^2);$$

$$b = \frac{r^2}{27}\left(\frac{M}{GJ}\right)^3.$$

Eine genauere Untersuchung dieser Spannungswerte zeigt, daß der größte Betrag, den eine Normalspannung einer Schnittfläche parallel zur x-Achse annehmen kann, an den Stellen $y=0$, $z=\pm r$ von der Spannung σ_y erreicht wird. Es wird dort

$$\sigma_y(0, \pm r) = \pm \frac{1}{9} \frac{M^3}{J^3} \frac{1}{G(3K+4G)} \lambda r^3 .$$

Führt man (als Vergleichswert) die Spannung

$$\sigma_{b0} = \pm \frac{M}{J} r = \pm \frac{4}{\pi r^3} M$$

ein, die sich in den äußersten Fasern des Querschnitts bei linearem Elastizitätsgesetz unter der Wirkung des Momentes M ergeben würde, so wird an den Stellen $y=0$, $z=\pm r$ das Verhältnis

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_{b0}} = \frac{1}{9} \frac{\sigma_{b0}^2}{G(3K+4G)} \lambda .$$

Bei positivem $\lambda (=g_2)$ haben somit σ_y und σ_{b0} gleiche, bei negativem λ dagegen verschiedene Vorzeichen.

An den gleichen Stellen nimmt der Spannungswert

$$\delta\sigma_x = \sigma_x - \frac{M}{J} z ,$$

um den sich die Längsspannung gegenüber ihrem Wert bei linearem Elastizitätsgesetz ändert, sein Extremum an. Man erhält dort auf Grund von (114) das Verhältnis

$$\frac{\delta\sigma_x}{\sigma_{b0}} = -\frac{1}{9} \frac{18K^2+21KG+2G^2}{2G(3K+G)} \frac{\sigma_{b0}^2}{G(3K+4G)} \lambda .$$

Bei positivem λ wird also der Betrag von σ_{b0} in den äußersten Fasern verkleinert, bei negativem λ vergrößert.

So ergibt sich z. B. für $\sigma_{b0}=100$ kg/cm² mit den Werten

$$\lambda = g_2 = 7{,}26 \cdot 10^6, \quad G = 0{,}470 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2, \quad K = 1{,}33 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

für Kupfer nach Ziff. 9, Beispiel c)

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_{b0}} = 0{,}292 \cdot 10^{-2}, \qquad \frac{\delta\sigma_x}{\sigma_{b0}} = -3{,}15 \cdot 10^{-2} .$$

Die zusätzlichen Spannungen halten sich demnach hier in sehr niedrigen Grenzen; es ist jedoch zu beachten, daß sie mit der dritten Potenz des Biegemomentes anwachsen.

Da auch der Beton ein nichtlineares Elastizitätsgesetz befolgt, ist es denkbar, daß in Eisenbetonträgern bei starker Biegebeanspruchung eine zusätzliche Zugspannung σ_y senkrecht zur Eiseneinlage auftritt, welche die relativ niedrige Bruchspannung des senkrecht zum Träger nicht durch Eiseneinlagen verstärkten Betons erreicht und so Längsrisse auf der Oberfläche des Trägers hervorruft.

12. Torsion von Stäben mit beliebigem Querschnitt. Als weiteres Problem der Elastizitätstheorie möge noch die Torsion eines zur z-Achse parallelen prismatischen Stabes von beliebigem Querschnitt Q unter einem Verdrillungsmoment M behandelt werden.

Wir wollen untersuchen, ob sich mit dem in der linearen Elastizitätstheorie üblichen Ansatz für die Spannungen und die Volumenkraft

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x,y), \quad \tau_{zx} = \tau_{zx}(x,y), \quad \mathfrak{R} = 0$$

bei geeigneter Wahl von τ_{yz} und τ_{zx} die Gleichgewichts- und die Verträglichkeitsbedingungen auch hier erfüllen lassen. Die ersteren, die sich nach (9) auf

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

reduzieren, werden genau dann erfüllt, wenn man die Spannungen gemäß

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

von einer Schubspannungsfunktion $\Phi(x,y)$ herleitet. Auf der Mantelfläche des Stabes muß dann bekanntlich $\Phi = \text{const}$ sein, und man wird i. a., da es ja bei der Bestimmung von τ_{yz} und τ_{zx} nur auf die Ableitungen von $\Phi(x,y)$ ankommt, auf einfach zusammenhängenden Querschnittsrändern $\Phi = 0$ annehmen.

In $\Phi(x,y)$ ausgedrückt, wird

$$s_0 = 0\,, \qquad t_0^2 = \frac{2}{3G^2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right],$$

so daß nach (44) und (45) die Verzerrungen

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \psi_{xy} = 0, \quad \psi_{yz} = -\frac{1}{G}\, g(t_0^2)\, \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,, \quad \psi_{zx} = \frac{1}{G}\, g(t_0^2)\, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (115), (116), (117)$$

werden. Die Verträglichkeitsbedingungen (19) reduzieren sich dann auf

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \psi_{yz}}{\partial x}\right) = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \psi_{yz}}{\partial x}\right) = 0$$

oder

$$\frac{\partial \psi_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \psi_{yz}}{\partial x} = c \qquad (c = \text{konst}),$$

was wegen (116) und (117) der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[g(t_0^2)\, \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(t_0^2)\, \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right] = c \qquad (118)$$

gleichwertig ist. Führt man die Differentiationen aus, so ergibt sich mit den Abkürzungen

$$g'(t_0^2) \equiv \frac{d}{d\, t_0^2}\, g(t_0^2), \qquad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

folgende quasilineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Spannungsfunktion $\Phi(x,y)$:

$$g(t_0^2)\cdot \Delta\Phi + g'(t_0^2)\cdot \frac{4}{3G^2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2\, \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right] = c\,. \qquad (119)$$

Zur Berechnung der Verschiebungen versuchen wir, wie in der linearen Theorie, den Ansatz

$$u = \omega y z, \qquad v = -\omega x z, \qquad w = w(x,y),$$

wobei ω den Torsionswinkel je Längeneinheit der Stabachse bedeutet. Dann sind offenbar die Gleichungen (115) mit (10) und (11) erfüllt. Aus (116) und (117) folgt

$$\psi_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \omega x = -\frac{1}{G}\, g(t_0^2)\, \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,, \qquad \psi_{zx} = \frac{\partial w}{\partial y} - \omega y = \frac{1}{G}\, g(t_0^2)\, \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,,$$

und somit

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{G}\, g(t_0^2)\, \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \omega x, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G}\, g(t_0^2)\, \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \omega y$$

als System von Differentialgleichungen zur Bestimmung der Verwölbung $w(x,y)$. Leitet man die erste der beiden Gleichungen nach x, die zweite nach y ab und setzt die rechten Seiten einander gleich, so erhält man

$$\frac{1}{G}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[g(t_0^2)\, \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(t_0^2)\, \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right]\right\} = -2\omega$$

oder wegen (118)

$$\omega = -\frac{c}{2G}\,,$$

also ein Ergebnis, das ganz dem bei linearem Elastizitätsgesetz entspricht.

Das Verdrillungsmoment M ergibt sich aus dem Integral

$$M = \iint_Q (\tau_{yz} x - \tau_{zx} y)\, dx\, dy$$

unter der Voraussetzung, daß auf dem Rand $\Phi = 0$ ist, in gleicher Weise wie bei der linearen Theorie zu

$$M = 2 \iint_Q \Phi(x,y)\, dx\, dy\,. \qquad (120)$$

Das Torsionsproblem besteht somit im wesentlichen darin, Lösungen der quasilinearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung für $\Phi(x,y)$ (119) zu finden, die auf dem Rand des Querschnitts verschwinden. Da diese Aufgabe jedoch infolge der komplizierten Form dieser Differentialgleichung schwierig ist, soll hier wiederum eine Näherungsmethode für den schon in der vorigen Ziffer behandelten Sonderfall entwickelt werden, daß die Funktion $g(t_0^2)$ in der Form

$$g(t_0^2) = 1 + \lambda t_0^2 \qquad (121)$$

darstellbar ist, wobei $\lambda t_0^2 \ll 1$ angenommen werden darf. Die Forderung $k(s_0) = 1$, die beim Biegeproblem der vorigen Ziffer noch zusätzlich zu stellen war, braucht hier jedoch nicht erhoben zu werden.

Wir nehmen an, das Torsionsproblem sei für das lineare Elastizitätsgesetz (mit $\lambda=0$) für den gleichen Verdrillungswinkel ω schon gelöst und habe die auf dem Rand verschwindende Spannungsfunktion $\bar{\Phi}(x,y)$ ergeben, welche die Gleichung

$$\Delta\bar{\Phi} = c = -2G\omega \tag{122}$$

befriedigt. Die zu dieser Funktion gehörigen Werte von τ_{yz}, τ_{zx} und t_0 seien ebenfalls durch Überstreichen gekennzeichnet. Wir setzen dann die Lösung des nichtlinearen Problems in der Form

$$\Phi(x,y) = \bar{\Phi}(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$$

mittels einer zu bestimmenden Funktion $\varphi(x,y)$ an, die auf dem Querschnittsrand verschwinden muß. Offenbar wird dann

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x} - \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \bar{\tau}_{yz} - \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \tag{123}$$

$$\tau_{zx} = \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \bar{\tau}_{zx} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{124}$$

$$t_0^2 = \frac{2}{3G^2}\left[\left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] = \bar{t}_0^2 + \lambda\cdot\frac{4}{3G^2}\left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

und

$$\Delta\Phi = \Delta\bar{\Phi} + \lambda\Delta\varphi = c + \lambda\Delta\varphi.$$

So wird aus (118)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+\lambda t_0^2)\left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(1+\lambda t_0^2)\left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right] = c$$

oder, wenn man von den mit λ behafteten Gliedern nur die linearen berücksichtigt,

$$\Delta\bar{\Phi} + \lambda\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x}\bar{t}_0^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y}\bar{t}_0^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right] = c.$$

Wegen (122) folgt hieraus für φ die lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\Delta\varphi + c\bar{t}_0^2 + \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x}\frac{\partial\bar{t}_0^2}{\partial x} + \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y}\frac{\partial\bar{t}_0^2}{\partial y} = 0. \tag{125}$$

Als Anwendung behandeln wir die Verdrillung eines Stabes von elliptischem Querschnitt mit der Randkurve

$$x^2 + \vartheta^2 y^2 - r^2 = 0 \quad (r, \vartheta = \text{konst}).$$

Die *de St. Venant*sche Lösung für das lineare Elastizitätsgesetz ist bekanntlich

$$\bar{\Phi}(x,y) = \frac{c}{2}\frac{1}{1+\vartheta^2}(x^2 + \vartheta^2 y^2 - r^2),$$

woraus

$$\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x} = \frac{cx}{1+\vartheta^2}, \qquad \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y} = \frac{c\vartheta^2 y}{1+\vartheta^2};$$

$$\bar{t}_0^2 = \frac{2c^2}{3G^2}\frac{1}{(1+\vartheta^2)^2}(x^2 + \vartheta^4 y^2), \quad \frac{\partial\bar{t}_0^2}{\partial x} = \frac{4c^2}{3G^2}\frac{x}{(1+\vartheta^2)^2}, \quad \frac{\partial\bar{t}_0^2}{\partial y} = \frac{4c^2}{3G^2}\frac{\vartheta^4 y}{(1+\vartheta^2)^2}$$

und somit nach (125) für $\varphi(x,y)$ die Differentialgleichung

$$\Delta\varphi + \frac{2c^3}{3G^2}\frac{1}{(1+\vartheta^2)^3}\left[(3+\vartheta^2)x^2 + \vartheta^4(1+3\vartheta^2)y^2\right] = 0$$

folgt. Die Lösung $\varphi(x,y)$, die auf dem Rand verschwindet, muß, wie man sich leicht überlegt, die Gestalt

$$\varphi(x,y) = -\frac{2c^3}{3G^2}\frac{1}{(1+\vartheta^2)^3}(x^2 + \vartheta^2 y^2 - r^2)(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma r^2) \tag{126}$$

mit den drei Konstanten α, β und γ annehmen. Es wird nämlich dann

$$\Delta\varphi = -\frac{4c^3}{3G^2}\frac{1}{(1+\vartheta^2)^3}\left\{\left[(6+\vartheta^2)\alpha + \beta\right]x^2 + \left[\vartheta^2\alpha + (1+6\vartheta^2)\beta^2\right]y^2 + \left[-\alpha - \beta + (1+\vartheta^2)\gamma\right]r^2\right\},$$

und man berechnet hieraus durch drei lineare Gleichungen für α, β und γ, daß die Differentialgleichung für $\varphi(x,y)$ befriedigt wird, falls man

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{12}\,\frac{3+19\,\vartheta^2+5\,\vartheta^4-3\,\vartheta^6}{1+6\,\vartheta^2+\vartheta^4}\,, \qquad \beta = \frac{1}{12}\,\frac{-3+5\,\vartheta^2+19\,\vartheta^4+3\,\vartheta^6}{1+6\,\vartheta^2+\vartheta^4}\,\vartheta^2\,, \\ \gamma &= \frac{1}{12}\,\frac{3+16\,\vartheta^2+10\,\vartheta^4+16\,\vartheta^6+3\,\vartheta^8}{(1+\vartheta^2)\,(1+6\,\vartheta^2+\vartheta^4)} \end{aligned}\right| \tag{127}$$

setzt. Die Spannungen werden nach (122) bis (124)

$$\tau_{yz} = \frac{2G}{1+\vartheta^2}\,\omega x\left\{1-\lambda\omega^2\,\frac{16}{3(1+\vartheta^2)^2}\left[2\alpha x^2+(\vartheta^2\alpha+\beta)y^2-(\alpha-\gamma)r^2\right]\right\}, \tag{128}$$

$$\tau_{zx} = -\,\frac{2G\,\vartheta^2}{1+\vartheta^2}\,\omega y\left\{1-\lambda\omega^2\,\frac{16}{3\,\vartheta^2(1+\vartheta^2)^2}\left[(\vartheta^2\alpha+\beta)x^2+2\beta\,\vartheta^2 y^2-(\beta-\vartheta^2\gamma)r^2\right]\right\}. \tag{129}$$

Für das Torsionsmoment M erhält man durch Integration über die Ellipsenfläche Q gemäß (120) nach einiger Zwischenrechnung

$$\left.\begin{aligned} M &= 2\iint\limits_Q \Phi(x,y)\,dx\,dy = 2\left[\iint\limits_Q \bar{\Phi}(x,y)\,dx\,dy+\lambda\iint\limits_Q \varphi(x,y)\,dx\,dy\right] \\ &= \frac{\pi G\,\omega r^4}{\vartheta(1+\vartheta^2)}\left[1-\lambda\omega^2\,\frac{4(3+2\,\vartheta^2+3\,\vartheta^4)}{9(1+\vartheta^2)^3}\,r^2\right]. \end{aligned}\right| \tag{130}$$

Für den Fall des Kreisquerschnitts vom Halbmesser $r(\vartheta=1)$ wird $\alpha=\beta=\gamma={}^1/_4$, so daß an der Stelle $x=r$, $y=0$ die Spannung τ_{yz} nach (128) den Wert

$$G\omega r\left(1-\lambda\omega^2\cdot\frac{2}{3}\,r^2\right)$$

annimmt, der sich aus dem exakten Wert (59) offenbar dann ergibt, wenn man die Potenzreihenentwicklung der Funktion $\gamma\left(\frac{2}{3}\,\omega^2 r^2\right)$ nach dem zweiten Glied abbricht und deren Koeffizienten γ_2, der ja nach (40) mit dem negativ genommenen Koeffizienten g_2 der Reihe für g übereinstimmt, durch $(-\lambda)$ ersetzt. Im gleichen Sinn erkennt man auch die Übereinstimmung des Momentwerts M von (130) mit demjenigen von Gleichung (62).

Es sei noch auf folgendes hingewiesen: Die Spannungsfunktion $\bar{\Phi}$ des elliptischen Vollquerschnitts für das *Hooke*sche Gesetz besitzt bekanntlich die Eigenschaft, daß sie auf Ellipsen, die zur Randellipse des Querschnittes ähnlich sind und ähnlich liegen, konstante Werte annimmt, so daß $\bar{\Phi}$ gleichzeitig die Spannungsfunktion für Hohlquerschnitte darstellt, die von solchen ähnlichen Ellipsen begrenzt werden. Dies trifft aber für die hier betrachtete Funktion $\Phi=\bar{\Phi}+\lambda\varphi$ nicht mehr zu, da, wie man sofort aus (126) erkennt, φ auf Ellipsen, die zur Randellipse ähnlich sind, nicht mehr konstant bleibt. Die aus τ_{yz} und τ_{zx} resultierende Schubspannung hat demnach auch nicht mehr, wie dies beim *Hooke*schen Gesetz der Fall war, in allen Punkten eines Ursprungsstrahles $y=\text{konst}\cdot x$ die gleiche Richtung.

Als Zahlenbeispiel wählen wir die große Halbachse der Querschnittsellipse 10 cm, die kleine 5 cm lang. Dann wird $r=10$ cm, $\vartheta=2$, und wir erhalten nach (127)

$$\alpha = -\,\frac{33}{492}\,,\quad \beta = +\,\frac{171}{41}\,,\quad \gamma = +\,\frac{2019}{2460}\,.$$

Mit den Konstanten für Siemens-Martin-Stahl

$$G = 0{,}870\cdot 10^6\ \text{kg/cm}^2, \qquad \lambda = g_2 = 0{,}085\cdot 10^6\,,$$

die wir im Beispiel b) von Ziff. 9 erhalten haben, wird somit bei einer Verdrillung

$$\omega = 2\cdot 10^{-4}\ \text{cm}^{-1}$$

je Längeneinheit die resultierende Spannung an den Enden der kleinen Halbachse, d. h. für $x=0$, $y=\pm r/2$, nach (129)

$$\begin{aligned} \tau_{zx}(0,\pm r/2) &= \mp\,\frac{4}{5}\,G\omega r\left(1-\frac{6112}{15375}\,\lambda\omega^2 r^2\right) \\ &= \mp\ 1392(1-0{,}135)\ \text{kg/cm}^2 \end{aligned}$$

und das Torsionsmoment nach (130)

$$\begin{aligned} M &= \frac{\pi}{10}\,G\omega r^4\left(1-\frac{236}{1125}\,\lambda\omega^2 r^2\right) \\ &= 5{,}47\,(1-0{,}071)\ \text{m to}\,. \end{aligned}$$

Die maximale Schubspannung verringert sich demnach gegenüber dem Wert, den sie bei gleichem Verdrillungswinkel und gleichem Schubmodul G bei *Hooke*schem Elastizitätsgesetz annehmen würde, um 13,5 % und das Torsionsmoment ebenso um 7,1 %.

13. Schlußbemerkung. Im Zusammenhang mit dem vorstehenden Versuch, die Grundgleichungen einer Theorie des elastischen Verhaltens fester Stoffe bei kleinen Verzerrungen in nichtlinearer Form aufzubauen, eröffnen sich im wesentlichen zwei große Gebiete, die eingehender zu durchforschen wären. So ist es einerseits nötig, die gebräuchlichen Werkstoffe daraufhin zu prüfen, wieweit sie das hier entwickelte Elastizitätsgesetz befolgen. Hierzu wären vor allem hydrostatische Spannungsversuche, Torsionsversuche sowie Zug- und Druckversuche an Stäben mit gleichzeitiger Messung von Längs- und Querdehnung durchzuführen. Die Verzerrungsgrößen sind dabei in erster Linie für die Spannungen unterhalb der jeweils technisch zulässigen Höchstwerte zu ermitteln, da ja das Elastizitätsgesetz gerade für die Anwendung in diesem Spannungsbereich bestimmt ist.

Andererseits müßte die Theorie der nicht elementaren Belastungsfälle, die ja hier nur durch die zwei Beispiele der reinen Biegung und der Torsion prismatischer Stäbe vertreten ist, noch weiter entwickelt werden. Weitere geschlossene exakte Lösungen für nicht gleichförmige (aber praktisch vorkommende) Spannungszustände werden sich wohl kaum noch finden lassen; hingegen kann man die Behandlung von Spannungszuständen, die nur von einer Ortskoordinate abhängen (z. B. solchen an dickwandigen Rohren unter Innen- und Außendruck oder an umlaufenden Scheiben mit Rotationssymmetrie) i. a. auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückführen, die für beliebige Kompressions- und Schubfunktionen eine rechnerische Lösung nach Differenzenverfahren oder eine geeignete zeichnerische Lösung zuläßt. Allerdings wird die Anpassung der Lösung an die Randbedingungen wegen der komplizierten nichtlinearen Form der Differentialgleichungen ziemlich große Schwierigkeiten bereiten.

Zweidimensionale Probleme werden sich jedoch wohl nur noch für bestimmte einfache Formen der Kompressions- und der Schubfunktion lösen lassen. Dies gilt z. B. vom Problem des ebenen Spannungszustandes, bei dem sich die partielle Differentialgleichung für die Spannungsfunktion leicht angeben läßt, wobei aber eine Weiterbehandlung dieser Gleichung nur bei kleiner Abweichung vom *Hooke*schen Gesetz (wie beim Problem der reinen Biegung) möglich zu sein scheint.

(Eingegangen am 26. November 1948.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Hans Kauderer*, (14a) Stuttgart N, Viergiebelweg 11.

Druckfehlerberichtigung zu Band XVII.

Auf Seite 240 muß in der ersten Zeile der Tabelle 3 rechts hinzugefügt werden: -1.